

FAISCEAUX SEMI-STABLES DE DIMENSION 1 SUR LE PLAN PROJECTIF

J. LE POTIER

1. INTRODUCTION

Le but principal de ce travail est d'étendre aux espaces de modules de faisceaux semi-stables de dimension 1 sur une surface algébrique projective X les résultats obtenus par S.A. Stromme et J. M. Drézet pour les faisceaux semi-stables sans torsion, en ce qui concerne la description des composantes irréductibles, et le calcul du groupe de Picard. Même si certains résultats sont valables sans grands changements sur quelques surfaces rationnelles comme les quadriques, nos énoncés ne sont vraiment satisfaisants que dans le cas du plan projectif. Désignons par $N_{P_2}(r, \chi)$ l'espace de modules des faisceaux semi-stables de dimension 1 de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ .

THÉORÈME 1.1.

1. *L'espace de modules $N_{P_2}(r, \chi)$ est une variété projective irréductible de dimension $r^2 + 1$.*

2. *Si $r \geq 3$, c'est une variété localement factorielle dont le groupe de Picard est un groupe abélien libre à deux générateurs.*

Ce résultat est démontré au § 3.2, où l'on donne une version plus précise de cet énoncé (théorème 3.5) : on donne en fait une description d'une base de ce groupe de Picard. On introduit pour ceci le morphisme canonique

$$\sigma : N_{P_2}(r, \chi) \rightarrow C_{P_2}(r)$$

de la variété $N_{P_2}(r, \chi)$ dans l'espace projectif $C_{P_2}(r)$ des courbes de degré r , qui associe à un faisceau semi-stable son support, défini par l'idéal de Fitting associé. Au-dessus de l'ouvert des courbes lisses, l'espace de modules étudié coïncide avec la variété de Picard relative. On peut alors choisir comme générateurs du groupe de Picard l'image réciproque du fibré $\mathcal{O}(1)$ par σ , et le fibré dit fibré déterminant : au-dessus de chaque point représentant une courbe lisse, ce fibré est isomorphe à une puissance du fibré défini par le diviseur Θ . Dans les cas $r = 1$ ou $r = 2$, le morphisme σ est en fait un isomorphisme.

Ce fibré déterminant sera défini en fait en toute généralité au chapitre 2 pour l'espace de modules $N_X(r, \chi)$ des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables de multiplicité r et caractéristique d'Euler-Poincaré χ sur une surface algébrique projective polarisée X . La construction est en fait directement inspirée de celle que nous donnons pour les espaces de

modules de faisceaux semi-stables sans torsion classiques sur une variété projective lisse quelconque [13]. Dans ce chapitre, nous étudions également au voisinage de quels points le morphisme canonique

$$\sigma : N_X(r, \chi) \rightarrow C_X(r)$$

de la variété $N_X(r, \chi)$ dans le schéma de Hilbert $C_X(r)$ des courbes de degré r , morphisme qui associe à la classe d'un faisceau semi-stable son support schématisé, est lisse. Ces renseignements sont utilisés au § 3.1 pour l'étude de l'irréductibilité quand X est le plan projectif; la démonstration donnée ici pour le plan projectif est en fait valable sans modifications par exemple quand X est une quadrique.

Le point essentiel de la démonstration du théorème principal 1.1 est le calcul du groupe de Picard de l'ouvert $N_X^s(r, \chi)$ des points qui représentent des faisceaux stables. Après avoir fixé un point $a \in P_2$, on considère pour ceci la projection de centre a sur la droite projective P_1 et l'ouvert U_a de $N_{P_2}^s(r, \chi)$ correspondant aux faisceaux stables dont le support ne contient pas le point a : le complémentaire de U_a est une hypersurface irréductible, ce qui nous ramène au calcul du groupe de Picard de l'ouvert U_a . L'ouvert U_a s'interprète comme espace de modules de paires stables (G, φ) formées d'un fibré vectoriel G sur la droite projective et d'un morphisme $\varphi : G \rightarrow G(1)$ selon une méthode bien connue: nous n'avons pas résisté à la tentation d'appeler une telle paire fibré de Higgs sur $(P_1, \mathcal{O}_{P_1}(1))$, tant les énoncés sont similaires aux énoncés maintenant classiques [20]. Le calcul du groupe de Picard de U_a se ramène à l'étude du groupe de Picard de l'ouvert $U_{a,rig} \subset U_a$ des fibrés de Higgs (G, φ) stables dits quasi-rigides, c'est-à-dire tels que G soit rigide. Le calcul du groupe de Picard de l'ouvert $U_{a,rig}$ est alors facile, car cet ouvert est un quotient d'un ouvert d'un espace affine par l'action propre et libre d'un groupe algébrique affine; en général, ce groupe algébrique n'est malheureusement pas réductif ce qui impose un peu de prudence dans la démonstration (cf. § 3.2).

Comme dans le travail de J. M. Drézet et M. S. Narasimhan [4] sur les surfaces de Riemann, les méthodes employées pour le calcul du groupe de Picard sont très proches de celles qui permettent d'étudier les conditions d'existence d'un faisceau universel sur $N_{P_2}(r, \chi) \times P_2$: on obtient en fait l'existence d'un faisceau universel si et seulement si r et χ sont premiers entre eux (théorème 3.19). Ceci permet de retrouver par une méthode complètement différente un résultat de N. Mestrano et S. Ramanan [16] portant sur l'existence d'un fibré universel pour le groupe de Picard relatif sur la courbe universelle du plan projectif: comme dans l'article de Drézet et Narasimhan, notre méthode utilise de façon essentielle la complétion de la variété de Picard, et notamment l'existence de points semi-stables non stables de $N_{P_2}(r, \chi)$.

Le chapitre 4 est consacré à une illustration du théorème principal. Il s'agit de comparer les espaces de modules $N_{P_2}(r, 0)$ et les espaces de modules classiques $M_{P_2^*}(r; 0, r)$ de faisceaux semi-stables sans torsion de rang r , de classe de Chern $c_1 = 0$ et $c_2 = r$ sur le plan projectif dual, via la transformée de Fourier, définie au § 4.1. On savait déjà, (cf. [15]) qu'il existe une transformation birationnelle entre ces deux espaces de modules; le résultat présenté ici est beaucoup plus précis, notamment

pour les petites valeurs de r . Ainsi, si $r = 1$ ou 2 , on obtient un isomorphisme (cf. corollaire 4.3). L'étude est également intéressante pour $r = 3$ et 4 car elle fournit un morphisme

$$\Phi : N_{P_2}(r, 0) \rightarrow M_{P_2^*}(r; 0, r)$$

qui est l'éclatement d'un point dans le cas où $r = 3$ et d'une sous-variété lisse isomorphe à un plan projectif dans le cas $r = 4$ (cf. théorèmes 4.4 et 4.8) : le diviseur exceptionnel qui apparaît est justement le diviseur Θ , diviseurs des classes de faisceaux semi-stables qui ont au moins une section non nulle. Ceci permet de comprendre pourquoi le groupe de Picard des espaces de modules $M_{P_2^*}(r; 0, r)$ (résultat de Drézet [2]) est un groupe cyclique infini, alors que dans notre cas, le groupe de Picard est un groupe libre à deux générateurs.

Au chapitre 5, nous démontrons (théorème 5.1) la rationalité de certains espaces de modules $N_{P_2}(r, \chi)$, notamment si $\chi = \pm 1 \bmod r$ ou si $\chi = \pm 2 \bmod r$. Nous avons dû nous limiter à ces cas particuliers car la méthode utilisée consiste essentiellement, après réduction aux cas $\chi = 1$ ou $\chi = 2$, à se ramener au problème de la rationalité des espaces de modules de faisceaux semi-stables sans torsion de rang χ sur le plan projectif ; la rationalité de ces espaces de modules n'est connue, nous semble-t'il, qu'en rang 1 ou 2 : en rang 1, il s'agit du schéma de Hilbert des points de P_2 ; en rang 2 ce sont les résultats classiques, inspirés des travaux de Barth [1], démontrés par Hulek [8], Strømme [22] et Maeda [14]. Pour $\chi = 1$, la démonstration que nous proposons est en fait un peu plus directe. Si l'on ajoute à nos résultats ceux de Formanek [5], on obtient en particulier la rationalité des espaces de modules $N_{P_2}(r, \chi)$ pour $r \leq 5$, mis à part $N_{P_2}(5, \chi)$, premier cas pour lequel nous ne savons pas apporter de réponse à la question de la rationalité.

2. FAISCEAUX SEMI-STABLES DE DIMENSION 1

2.1. Le module $N_X(r, \chi)$

Soit $(X, \mathcal{O}_X(1))$ une surface algébrique projective lisse polarisée. On considère l'algèbre de Grothendieck $K(X)$ des classes de faisceaux algébriques cohérents, muni de la forme quadratique $x \rightarrow \chi(x^2)$, dont on désigne par $\langle, \rangle$ la forme polaire associée. On désigne par h la classe dans $K(X)$ du faisceau structural d'une section hyperplane. Pour tout faisceau algébrique cohérent F de dimension 1, l'entier positif $r = \langle F, h \rangle$ s'appelle la multiplicité de F . Le polynôme de Hilbert de F s'écrit alors $\chi(F(m)) = rm + \chi$ où χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré. On notera encore h la classe de Chern de $\mathcal{O}_X(1)$, et par $(,)$ la forme d'intersection sur $H^2(X, \mathbb{Z})$, de sorte que si $c_1 \in H^2(X, F)$ est la première classe de Chern de F , on a aussi $r = (c_1, h)$.

Si χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un tel faisceau, on appelle pente de F le nombre

$$\mu(F) = \frac{\chi}{r}$$

Définition 2.1. Un faisceau algébrique cohérent de dimension 1 sur X est dit *semi-stable* (resp. *stable*) si

1. il est pur, c'est-à-dire qu'il n'a pas de sous-faisceau cohérent de dimension 0;
2. pour tout sous-faisceau cohérent non nul $F' \subset F$, distinct de F on a

$$\mu(F') \leq \mu(F) \text{ (resp. } < \text{)}$$

Les faisceaux cohérents semi-stables de pente fixée constituent une catégorie abélienne; les faisceaux stables sont les objets simples de cette catégorie. Pour chaque faisceau semi-stable F de pente μ , on peut définir la notion de filtration de Jordan-Hölder: il s'agit de filtrations croissantes

$$\{0\} \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k = F$$

telles que le quotient $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soit stable de pente μ . La somme directe $gr(F) = \bigoplus gr_i$ s'appelle le gradué associé à la filtration de Jordan-Hölder. Si F est un faisceau semi-stable, les gradués associés à deux filtrations de Jordan-Hölder sont isomorphes. Deux faisceaux semi-stables sont dits S -équivalents si leurs gradués de Jordan-Hölder sont isomorphes. Un faisceau semi-stable est dit polystable s'il est somme directe de faisceaux stables de même pente.

On considère le foncteur $\mathbf{N}_X(r, \chi)$ qui associe à la variété algébrique S l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles S -plates de faisceaux algébriques cohérents sur X de dimension 1, de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ .

THÉORÈME 2.2. ([20]).

1. Le foncteur $\mathbf{N}_X(r, \chi)$ a un espace de modules grossier $\mathbf{N}_X(r, \chi)$ dont les points sont les classes de S -équivalence de faisceaux semi-stables sur X .
2. La variété $\mathbf{N}_X(r, \chi)$ est projective.
3. Les classes des faisceaux stables de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ forment un ouvert $\mathbf{N}_X^s(r, \chi)$.

Chaque point de l'espace de modules $\mathbf{N}_X(r, \chi)$ a un représentant polystable et un seul à isomorphisme près. Soit $NS(X)$ le groupe de Néron-Séveri de X . On a évidemment une décomposition en composantes disjointes

$$\mathbf{N}_X(r, \chi) = \coprod_{\substack{c_1 \in NS(X) \\ (c_1, \chi) = r}} \mathbf{N}_X(c_1, \chi)$$

correspondant aux faisceaux de même classe de Chern c_1 , appelée aussi classe fondamentale.

La construction se fait de la manière suivante: on montre d'abord que les faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert fixé constituent une famille limitée. Dans la suite, on choisira m de sorte pour que pour tout faisceau semistable F de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ , le faisceau $F(m)$ soit engendré par ses sections, et que $H^1(F(m))=0$. Un tel entier étant choisi, on considère un espace vectoriel H de dimension $n = rm + \chi$ et le fibré vectoriel $B = H \otimes \mathcal{O}_X(-m)$. Sur le schéma de Hilbert-Grothendieck $\text{Hilb}^{r, \chi}(B)$ des faisceaux quotients de B de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ , le groupe

$Sl(H)$ opère de manière naturelle. Si l'entier m est suffisamment grand, l'ouvert Ω'' des points semi-stables pour l'action de $Sl(H)$ correspond aux faisceaux quotients de B qui sont semi-stables et tels que le morphisme d'évaluation $H \rightarrow H^0(F(m))$ soit un isomorphisme. Alors le quotient de Mumford

$$N_X(r, \chi) = \Omega''/Sl(H)$$

est une variété projective : on vérifie que c'est un espace de modules grossier pour le foncteur considéré.

PROPOSITION 2.3. Soient $c_1 \in NS(X)$, et $\Omega''(c_1)$ la composante de Ω'' correspondant aux quotients F de B de classe fondamentale c_1 . Soit ω_X le fibré canonique sur X . On suppose $(c_1, \omega_X) < 0$.

1. L'ouvert $\Omega''(c_1)$ est lisse de dimension $n^2 + c_1^2$.

2. La variété des points stables $N_X^s(c_1, \chi)$ est lisse de dimension $c_1^2 + 1$.

Démonstration. Soit q un point $\Omega''(c_1)$ correspondant à un quotient semi-stable $F = B/A$. L'espace tangent de Zariski en q à l'ouvert Ω'' s'identifie à $\text{Hom}(A, F)$. De plus, on sait d'après le critère de lissité de Grothendieck que cet ouvert est lisse au voisinage de q si l'on a $\text{Ext}^1(A, F) = 0$. Or, on a la suite exacte

$$\text{Ext}^1(B, F) \rightarrow \text{Ext}^1(A, F) \rightarrow \text{Ext}^2(F, F) \rightarrow 0$$

Puisque $H^1(F(m)) = 0$ on voit qu'il suffit de vérifier que $\text{Ext}^2(F, F) = 0$. Par dualité de Serre, il suffit de vérifier que $\text{Hom}(F, F \otimes \omega_X) = 0$. Mais on a la formule

$$\chi(F \otimes \omega_X) = (c_1, \omega_X) + \chi$$

et par conséquent $\mu(F \otimes \omega_X) < \mu(F)$. Ainsi, l'assertion annoncée résulte de la définition de la semi-stabilité. Compte-tenu de la formule de Riemann-Roch, ceci prouve l'assertion 1.

Pour l'assertion 2, on remarque que le stabilisateur d'un point de Ω'' se plonge dans le groupe des automorphismes du faisceau quotient correspondant F . Or, on a le lemme suivant :

LEMME 2.4. Soit F un faisceau stable de dimension 1. Alors tout endomorphisme de F est une homothétie.

Il en résulte que $N_X^s(c_1, \chi)$ est le quotient de la variété lisse $\Omega''(c_1)$ par l'action propre et libre du groupe $PSL(H)$. Donc cet ouvert est lisse de dimension $c_1^2 + 1$. $\square$

Démonstration du lemme 2.4. Il s'agit de vérifier que si F est un faisceau stable et $f: F \rightarrow F$ un morphisme non nul, il est inversible, et algébrique. Pour la première assertion, ceci résulte de la définition de la stabilité. Pour la seconde, on peut projeter sur P_1 en choisissant un centre de projection qui ne rencontre pas le support de F : le faisceau image directe G est alors localement libre de rang r sur P_1 ; on a alors un homomorphisme d'algèbres

$$\text{Hom}(F, F) \rightarrow \text{Hom}(G, G)$$

qui est injectif. D'après le théorème de Cayley-Hamilton l'endomorphisme g de G associé à f satisfait à une équation algébrique. Il en est donc de même de f . $\square$

2.2. Le support schématique

Soit F est un faisceau cohérent pur de dimension 1 sur X , et de classe fondamentale c_1 . Ce faisceau est de Cohen-Macaulay et a par conséquent une résolution par des faisceaux localement libres

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{u} B \rightarrow F \rightarrow 0.$$

La courbe C définie par le déterminant de u est indépendante du choix de la résolution choisie, et peut en fait déjà s'obtenir à partir d'une résolution locale. C'est en général une courbe non réduite; la courbe réduite sous-jacente est le support de F . La courbe C s'appelle le *support schématique* de F . Elle a pour classe fondamentale c_1 , et donc pour degré la multiplicité $r = (c_1, h)$.

Remarque 2.5. Un faisceau dont le support schématique est irréductible et réduit est évidemment stable.

Remarque 2.6. Un faisceau inversible sur une courbe intègre $C \subset X$ définit un faisceau pur de dimension 1 sur X . En général, il n'est pas vrai qu'il est stable; c'est pourtant vrai pour le faisceau structural de C si le groupe de Picard de X est un groupe cyclique.

Soit $C_X(r)$ le schéma de Hilbert des courbes de degré r sur X . La construction du support schématique peut se faire en familles: une famille plate F de faisceaux purs de dimension 1 et de multiplicité r , paramétrée par une variété algébrique S définit un morphisme $S \rightarrow C_X(r)$. La propriété de module grossier de $N_X(r, \chi)$ fournit alors un morphisme

$$\sigma: N_X(r, \chi) \rightarrow C_X(r)$$

Définition 2.7. Un faisceau cohérent F pur de dimension 1 sur X est dit lisse s'il est localement libre sur son support. Dans le cas contraire on dira que F est singulier.

PROPOSITION 2.8. Soit $c_1 \in NS(X)$ tel que $(c_1, \omega_X) < 0$. Soit F un faisceau stable de dimension 1, lisse, de classe fondamentale c_1 , q le point de $N_X(r, \chi)$ défini par F . Alors le morphisme

$$\sigma: N_X(r, \chi) \rightarrow C_X(r)$$

est lisse au voisinage du point q .

Démonstration. L'hypothèse entraîne que le point q est lisse; l'espace tangent de Zariski à $N_X(r, \chi)$ s'identifie à $\text{Ext}^1(F, F)$. Soit C le support schématique de F . La suite spectrale reliant Ext globaux et Ext locaux, donnée par $E_2^{i,j} = H^i(\text{Ext}^j(F, F))$ et d'aboutissement $\text{Ext}^k(F, F)$ en degré $k = i + j$ fournit un morphisme

$$(1) \quad \text{Ext}^1(F, F) \rightarrow H^0(\text{Ext}^2(F, F))$$

qui, du fait que $H^2(\mathcal{O}_C) = 0$, est surjectif. Comme F est un faisceau inversible sur C , $\text{Ext}^1(F, F)$ est isomorphe au fibré normal N_C de la courbe C , et donc $H^0(\text{Ext}^2(F, F))$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski à $C_X(r)$ au point défini par la courbe C . De même, la suite spectrale fournit un isomorphisme

$$\text{Ext}^2(F, F) \simeq H^1(\text{Ext}^1(F, F))$$

ce qui prouve que $H^1(N_C) = 0$, et donc, d'après le critère de lissité de Grothendieck, le point C est un point lisse du schéma de Hilbert $\mathbf{C}_X(r)$.

Il reste à voir que le morphisme canonique (1) s'identifie à l'application linéaire tangente à σ au point q . Ce point provient d'un point $p \in \Omega''$ représentant un faisceau quotient $F = B/A$. Il s'agit en fait de calculer l'application linéaire tangente en p au morphisme canonique $\rho: \Omega'' \rightarrow \mathbf{C}_X(r)$. Désignons par $u: A \rightarrow B$ le morphisme d'inclusion; la courbe C associée est la section du fibré $\det(B) \otimes \det(A)^{-1}$ définie par $\det(u)$, et le fibré normal est donc la restriction de ce fibré à la courbe C .

Rappelons que $T_p \Omega'' = \text{Hom}(A, F)$. Pour calculer l'application linéaire tangente au point p au morphisme $\rho: \Omega'' \rightarrow \mathbf{C}_X(r)$ on introduit pour chaque point $x \in X$ la dérivée en $u(x)$ de l'application n -linéaire $\text{Hom}(A(x), B(x)) \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $w \mapsto \det w$. Soit $v \in \text{Hom}(A, F)$; puisque A est localement libre, on peut alors choisir localement, sur un ouvert affine U_i , un relèvement $v_i \in H^0(U_i, \text{Hom}(A, B))$. Alors la section de N_C définie sur U_i par

$$w_i = \det'(u; v_i)|_{C \cap U_i}$$

ne dépend pas du choix du relèvement v_i . Par suite, ces différentes sections locales se recollent et fournissent une section globale $w \in H^0(N_C)$: l'application linéaire $v \mapsto w$ est la dérivée que nous cherchons. Constatons que si l'on pouvait relever globalement v en un élément de $\text{Hom}(B, F)$, la section w ainsi calculée serait bien nulle: en effet, on a d'après la définition de l'ouvert Ω'' on a un isomorphisme $\text{Hom}(B, B) \simeq \text{Hom}(B, F)$ et v proviendrait alors d'un élément $v' \in \text{Hom}(A, B)$ défini par $v' = gu$, avec $g \in \text{Hom}(B, B)$. Il en résulte que la section $\det(u; v')$ serait divisible par l'équation de C .

On sait que F est localement libre sur son support; ainsi, pour $x \in C$, on a $\dim F(x) = 1$. Au voisinage U d'un point x on peut écrire $A = A' \oplus A''$ et $B = B' \oplus B''$, avec A' et B' de rang 1, et la matrice de u s'écrit dans ces sommes directes

$$u = \begin{pmatrix} u' & 0 \\ 0 & u'' \end{pmatrix}$$

avec u'' inversible. Alors $\det u''$ induit un isomorphisme $A'^{-1} \otimes B' \simeq (\det A)^{-1} \otimes \det B$, et F s'identifie au conoyau du morphisme $u': A' \rightarrow B'$. La section $v \in \text{Hom}(A, F)$ se relève en une section $A \rightarrow B$ de matrice

$$v = \begin{pmatrix} v' & v'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que $w|_{C \cap U} = v' \det u''$.

Considérons le diagramme commutatif de faisceaux algébriques cohérents sur l'ouvert U induit par les inclusions $A' \hookrightarrow A$ et $B' \hookrightarrow B$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}(B, F) & \rightarrow & \text{Hom}(A, F) & \rightarrow & \text{Ext}^1(F, F) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}(B', F) & \rightarrow & \text{Hom}(A', F) & \rightarrow & \text{Ext}^1(F, F) \rightarrow 0 \end{array}$$

Ainsi, la section de $Ex^s(F, F)$ obtenue sur U est celle qui est associée à v' via la seconde suite exacte; si on l'identifie à une section de $(\det A)^{-1} \otimes \det B$, on obtient exactement $w|_{U \cap C}$. $\square$

La démonstration ci-dessus a en fait prouvé le résultat suivant :

PROPOSITION 2.9. *Soit $c_1 \in NS(X)$, tel que $(c_1, \omega_X) < 0$. Soit p un point de $\Omega^s \subset \text{Hilb}^{r \times}(X)$ représentant un faisceau quotient lisse de classe fondamentale c_1 . Alors le morphisme canonique*

$$\rho : \Omega^s \rightarrow C_X(r)$$

est lisse au voisinage de p .

2.3. Fibrés inversibles sur $N_X(c_1, \chi)$

On considère sur l'algèbre de Grothendieck $K(X)$ la forme quadratique $\xi \mapsto \chi(\xi^2)$. Elle provient d'une forme quadratique sur l'algèbre de Grothendieck topologique $K_{top}(X)$: si r désigne le rang, c_1 la classe de Chern et χ la caractéristique d'Euler-Poincaré, on a

$$\chi(\xi^2) = 2r\chi - c_1^2 - \chi(\mathcal{O}_X)r^2.$$

L'orthogonal d'un élément $\xi \in K(X)$ ne dépend donc que de son image dans $K_{top}(X)$. Si ξ est la classe dans $K(X)$ d'un faisceau de dimension 1, de classe fondamentale c_1 et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ l'orthogonal de ξ est constitué des éléments $\xi' \in K(X)$ de rang r' , de classe de Chern c'_1 et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ' tels que $(c_1, c'_1) + r'\chi = 0$. On notera $Z(c_1, \chi)$ cet orthogonal. Cet orthogonal contient en particulier l'idéal $A^2(X)$ des cycles de dimension 0; si $r = \langle c_1, h \rangle$ est la multiplicité de ξ et $\delta = \text{pgcd}(r, \chi)$ il contient aussi l'élément

$$\eta = \frac{1}{\delta}(-r + \chi h).$$

Considérons une famille plate $\mathcal{F}$ de faisceaux semi-stables de dimension 1 sur X , paramétrée par une variété algébrique S . On considère d'autre part le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S \times X & \xrightarrow{p} & X \\ q \downarrow & & \\ S & & \end{array}$$

où p et q sont les projections canoniques. Pour $u \in K(X)$, le produit $\mathcal{F} \cdot p^*(u)$ a un sens dans le groupe de Grothendieck de $K(S \times X)$, et par image directe, on obtient un élément dans le groupe de Grothendieck $K(S)$ engendré par les fibrés vectoriels algébriques. Par suite, la formule

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(u) = \det(q_*(\mathcal{F} \cdot p^*(u)))$$

a un sens et définit une classe de fibrés inversibles sur S . En particulier, si on applique ceci au faisceau quotient universel sur $\Omega^s \times X$, on obtient un fibré inversible, défini à isomorphisme près, sur Ω^s et ce fibré est muni d'une action naturelle du groupe $GL(H)$. Ce fibré ne se quotiente pas obligatoirement à $N_X(c_1, \chi)$. Si $u \in Z(c_1, \chi)$ on obtient un quotient sur

l'ouvert $N_X^*(c_1, \chi)$ des points stables; si on veut obtenir un quotient sur la variété tout entière, la condition est plus compliquée: comme dans [13] on vérifie le résultat suivant:

PROPOSITION 2.10. *Soit $\mathcal{H}$ la sous-algèbre de $K(X)$ engendrée par h . Si $u \in \mathcal{H}^{\perp} \cap Z(c_1, \chi)$, il existe dans $\text{Pic}(N_X(c_1, \chi))$ un élément $\mathcal{L}(u)$ caractérisé par la propriété universelle suivante: pour toute famille plate $\mathcal{F}$ de faisceau semi-stables sur X de classe fondamentale c_1 et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ paramétrée par la variété algébrique S on a*

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(u) = f_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{L}(u))$$

où $f_{\mathcal{F}}: S \rightarrow N_X(c_1, \chi)$ est le morphisme modulaire associé à la famille $\mathcal{F}$.

Cas particuliers. 1) Pour $u \in A^2(X)$ on obtient un fibré inversible $\mathcal{L}(u)$ sur $N_X(c_1, \chi)$; ce fibré est en fait l'image réciproque d'un fibré inversible défini sur le schéma de Hilbert $C_X(r)$. Si u est la classe d'un point $a \in X$, le fibré $\mathcal{L}(a)$ a une section, dont le schéma des zéros correspond aux faisceaux dont le support passe par a .

2) Si on prend

$$u = \gamma = \frac{-r + \chi h}{\delta}$$

on obtient aussi un fibré inversible $\mathcal{D} = \mathcal{L}(\gamma)$ sur $N_X(c_1, \chi)$, appelé fibré déterminant. Pour $\chi = 0$, il possède une section dont le schéma des zéros a pour fermé sous-jacent les points de $N_X(c_1, \chi)$ correspondant aux faisceaux F tels que $h^0(F) \neq 0$.

En effet, considérons dans le produit $\Omega^{ss} \times X$ le sous-schéma $\mathcal{C}$ défini par l'idéal de Fitting du faisceau universel $\mathcal{F}$; considérons les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & X \\ q \downarrow & & \\ \Omega^{ss} & & \end{array}$$

Sur $\mathcal{C}$ on a une suite exacte universelle $0 \rightarrow \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ où $\mathcal{B}'$ désigne l'image réciproque de B par la projection p . Si m a été choisi suffisamment grand, $q_*(\mathcal{B}') = 0$ et $R^1 q_*(\mathcal{B}')$ est localement libre de rang ρ ; et la même chose pour le faisceau Ω^{ss} -plat $\mathcal{A}'$: on a $q_*(\mathcal{A}') = 0$ et $R^1 q_*(\mathcal{A}')$ est localement libre de même rang ρ . Par image directe on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow q_*(\mathcal{F}) \rightarrow R^1 q_*(\mathcal{A}') \xrightarrow{f} R^1 q_*(\mathcal{B}') \rightarrow R^1 q_*(\mathcal{F}) \rightarrow 0$$

Chacun de ces faisceaux est muni d'une action naturelle de $GL(H)$, et le morphisme f est équivariant. On a alors

$$\det q_*(\mathcal{F})^{-1} = \det R^1 q_*(\mathcal{B}') \otimes (\det R^1 q_*(\mathcal{A}'))^{-1}$$

et $\det f$ définit une section invariante du fibré inversible $(\det q_*(\mathcal{F}))^{-1}$. Ce fibré provient de $N_X(r, \chi)$ et on obtient ainsi un représentant pour le fibré déterminant $\mathcal{D}$; la section ci-dessus étant invariante provient d'une

section de $\mathcal{D}$ dont le schéma des zéros correspond bien aux faisceaux F' tels que $h^0(F') \neq 0$.

Au-dessus d'une courbe lisse, on obtient bien sûr le diviseur Θ .

3. LE CAS DU PLAN PROJECTIF

Dans le cas où X plan projectif P_2 , les classes $c_1 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ qui représentent des courbes effectives satisfont bien sûr à la condition $(c_1, \omega_X) < 0$ de sorte que l'on peut appliquer les résultats de la section précédente.

3.1. L'irréductibilité

THÉORÈME 3.1. *La variété $N_{P_2}(r, \chi)$ est irréductible de dimension $r^2 + 1$.*

Comme dans la section précédente, on considère l'ouvert Ω^{ss} de $\text{Hilb}^{r\chi}(B)$, où B est le fibré trivial $B = H \otimes \mathcal{O}_X(m)$ et H un espace vectoriel de dimension $n = rm + \chi$. Il suffit évidemment de démontrer que l'ouvert Ω^{ss} est irréductible. On sait déjà que c'est une variété lisse de dimension $r^2 + n^2$.

LEMME 3.2. *Le fermé de Ω^{ss} des points représentant des faisceaux quotients singuliers est de codimension ≥ 2 .*

Démonstration. Un point $a \in P_2$ est singulier pour le faisceau semi-stable F si $\dim F(a) \geq 2$. Soit $\mathcal{F}$ le faisceau quotient universel sur $\Omega^{ss} \times P_2$. Considérons le fermé Σ_l des paires $(p, a) \in \Omega^{ss} \times P_2$ telles que $\dim \mathcal{F}(p, a) \geq l$. Ce fermé est sous-jacent à une variété déterminantielle : si on pose $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{\Omega^{ss}} \otimes B$ et si on désigne par $\mathcal{A}$ le sous-faisceau universel, par $u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ le morphisme d'inclusion, c'est la variété des mineurs d'ordre $n - l + 1$ de u . Cette variété est de codimension l^2 : il suffit pour le voir de constater que la différentielle de Petri au point (p, a)

$$T_p \Omega^{ss} \oplus T_a P_2 \rightarrow L(\ker u(p, a), \text{coker } u(p, a))$$

est surjective. Nous allons montrer que c'est déjà le cas pour la différentielle partielle au point $(p, a) : T_p \Omega^{ss} \rightarrow L(\ker u(p, a), \text{coker } u(p, a))$. Posons $A = \mathcal{A}(p)$, $F = \mathcal{F}(p)$. On a $F(a) = \text{coker } u(p, a)$ et $\ker u(p, a) \subset A(a)$; l'espace tangent $T_p \Omega^{ss}$ est isomorphe à $\text{Hom}(A, F)$ est la différentielle partielle ci-dessus est donnée par

$$v \mapsto v(a)|_{\ker u(p, a)}$$

de sorte que l'on est ramené à prouver le lemme suivant :

LEMME 3.3. (C. Sorger). *Soit p un point de Ω^{ss} représentant un faisceau quotient $F = B/A$. Le faisceau $\text{Hom}(A, F)$ est engendré par ses sections.*

Démonstration. On a la suite exacte

$$\text{Hom}(B, F) \rightarrow \text{Hom}(A, F) \rightarrow \text{Ext}^1(F, F) \rightarrow 0$$

Le faisceau $\text{Hom}(B, F)$ est évidemment engendré par ses sections. Il suffit donc de prouver que $\text{Ext}^1(F, F)$ est engendré par ses sections : en effet, le morphisme $\text{Ext}^1(F, F) \rightarrow H^0(\text{Ext}^1(F, F))$ est surjectif car $H^2(\text{Hom}(F, F)) =$

$= 0$, et du fait que $\text{Ext}^1(B, F) = 0$ les éléments de $\text{Ext}^1(F, F)$ proviennent de $\text{Hom}(A, F)$ c'est-à-dire de sections de $\text{Hom}(A, F)$.

Par le critère de Castelnuovo, il suffit de vérifier que $H^i(\text{Ext}^1(F, F)(j)) = 0$ pour $j \geq -i$. C'est bien sûr évident pour $i = 2$; pour $i = 1$ on a, du fait que F est de Cohen-Macaulay, un isomorphisme

$$\text{Ext}^2(F, F(j)) \simeq H^1(\text{Ext}^1(F, F(j))).$$

Mais, par dualité de Serre, le premier membre de cette égalité est nul. D'où le lemme. $\square$

Si on considère la projection $\Sigma_i \rightarrow \Omega^{ss}$ on voit que son image est de codimension $\geq 4 - 2 = 2$; c'est le fermé des points de Ω^{ss} représentant des faisceaux quotients singuliers. $\square$

Fin de la démonstration. Les points de Ω^{ss} qui représentent un faisceau quotient lisse forment un ouvert dense d'après le lemme 3.2. L'image de cet ouvert est un ouvert de $\mathbf{C}_{P_2}(r)$ et donc contient des points représentant des faisceaux portés par des courbes lisses. Mais, au-dessus de l'ouvert des courbes lisses, les morphisme

$$\rho : \mathbf{N}_{P_2}(r, \chi) \rightarrow \mathbf{C}_{P_2}(r)$$

s'identifie à la variété de Picard relative P des fibrés inversibles de caractéristique d'Euler-Poincaré χ sur courbe universelle de degré r du plan projectif : c'est donc une variété irréductible de dimension $r^2 + 1$. Un tel fibré inversible définit évidemment un faisceau stable de dimension 1. Il en résulte qu'au-dessus de cet ouvert P , le morphisme de projection $\Omega^{ss} \rightarrow \mathbf{N}_{P_2}(r, \chi)$ a ses fibres irréductibles de dimension $n^2 + 1$: l'image réciproque de P est donc un ouvert irréductible de dimension $r^2 + n^2$. Puisque cet ouvert est partout dense, il en résulte que Ω^{ss} est irréductible. $\square$

PROPOSITION 3.4. *Soit r un entier ≥ 2 . Le complémentaire de l'ouvert $\mathbf{N}_{P_2}^s(r, \chi)$ des classes d'isomorphisme de faisceaux stables est de codimension $\geq 2r - 3$.*

Démonstration. Soient (r', χ') et (r'', χ'') des entiers satisfaisant aux conditions suivantes : $r' > 0$, $r'' > 0$, $r' + r'' = r$ et $\chi' + \chi'' = \chi$ et

$$\frac{\chi'}{r'} = \frac{\chi''}{r''} = \mu = \frac{\chi}{r}.$$

Si F' et F'' sont des faisceaux semi-stables de multiplicité r' et r'' et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ' et χ'' respectivement, $F' \oplus F''$ est semi-stable de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ . Ceci fournit un morphisme canonique

$$\mathbf{N}_{P_2}(r', \chi') \times \mathbf{N}_{P_2}(r'', \chi'') \rightarrow \mathbf{N}_{P_2}(r, \chi)$$

Le fermé des classes de faisceaux non stables est la réunion des images de ces morphismes. Par suite, sa codimension est $\geq r^2 - r'^2 - r''^2 - 1 = 2r'r'' - 1 \geq 2r - 3$. $\square$

3.2. Le groupe de Picard

Le schéma de Hilbert des courbes de $\mathbf{P}_2$ de degré r est l'espace projectif $|\mathcal{O}_{P_2}(r)|$ de dimension $\frac{1}{2} r(r+3)$.

THÉORÈME 3.5.

1. Pour $r = 1$ ou 2 , le morphisme $\sigma: \mathbf{N}_{\mathbf{P}^2}(r, \chi) \rightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{P}^2}(r)$ est un isomorphisme, et par conséquent son groupe de Picard est $\mathbf{Z}$, avec pour générateur le fibré $\mathcal{L}(a)$ associé à un point.

2. Pour $r \geq 3$, le groupe de Picard est un groupe libre à 2 générateurs : on peut choisir comme générateurs le fibré $\mathcal{L}(a)$ associé à un point, image réciproque de $\mathcal{O}(1)$ par le morphisme σ , et le fibre déterminant $\mathcal{D}$.

3. La variété $\mathbf{N}_{\mathbf{P}^2}(r, \chi)$ est localement factorielle.

Ce résultat est analogue à celui qui a été obtenu par Strømme [22] et Drézet [2] pour les espaces de modules faisceaux semi-stables sans torsion sur l'espace projectif. Le cas $r = 1$ est évident. Dans le cas $r = 2$, on se ramène par normalisation aux cas $\chi = 0$ ou $\chi = 1$.

Le cas $r = 2$, $\chi = 1$. Un faisceau semi-stable de multiplicité 2 et caractéristique $\chi = 1$ a forcément une section, d'où un morphisme non nul $\mathcal{O}_C \rightarrow F$ et $\mathcal{O}_C$ est stable (cf. C. Sorger [21]), de caractéristique $\chi = 1$. Ce morphisme est obligatoirement un isomorphisme. La propriété de module grossier appliquée à la famille de faisceaux stables $\mathcal{O}_C$, paramétrée par les coniques C du plan projectif définit un morphisme $\mathbf{C}_{\mathbf{P}^2}(2) \rightarrow \mathbf{N}_{\mathbf{P}^2}(2, 1)$ qui est l'inverse de σ .

Le cas $r = 2$, $\chi = 0$. La fibre de σ est évidemment réduite à un point au-dessus d'une conique C lisse. Si F est un faisceau semi-stable de support schématique une conique singulière C , la conique C contient une droite l d'équation $z = 0$, avec $z \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1))$. Alors le morphisme $z: F \rightarrow F(1)$, s'il n'est pas nul, a son image de multiplicité 1, par conséquent F n'est pas stable. C'est encore le cas s'il est nul, car F est alors un $\mathcal{O}_l$ -module libre; il ne peut être stable. Ce faisceau est alors S -équivalent à $F' \oplus F''$ avec F' et F'' de multiplicité 1 et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$. Cette classe d'équivalence est évidemment déterminée par la conique. Le morphisme $\sigma: \mathbf{N}_{\mathbf{P}^2}(2, 0) \rightarrow \mathbf{C}_{\mathbf{P}^2}(2)$ est alors bijectif; les deux variétés étant normales, c'est un isomorphisme.

L'ouvert U_a . On se place désormais dans l'hypothèse $r \geq 3$. En cas de besoin, on pourra supposer $0 \leq \chi < r$. Soit $a \in X$. Considérons l'ouvert U_a de $\mathbf{N}_{\mathbf{P}^2}(r, \chi)$ des classes d'isomorphisme de faisceaux stables dont le support ne contient pas le point a .

PROPOSITION 3.6. L'ouvert U_a est une variété lisse de dimension $r^2 + 1$ dont le groupe de Picard est un groupe cyclique infini de générateur le fibré déterminant $\mathcal{D}$.

Cet ouvert U_a a une description simple en termes de fibrés de Higgs sur la droite projective. Commençons par quelques généralités.

Fibrés de Higgs. On se fixe dans ce paragraphe une courbe projective lisse C , et un fibré inversible L sur C , de degré l .

Définition 3.7. On appelle faisceau de Higgs sur (C, L) une paire $F = (G, \varphi)$ formée d'un faisceau algébrique cohérent G sur C et d'un morphisme $\varphi: G \rightarrow G \otimes L$. Une telle paire est dite stable (resp. semi-stable) si le fais-

ceau G est localement libre, et si pour tout sous-faisceau $G' \subset G$, de rang $0 < r' < r$ et tel que $\varphi(G') \subset G' \otimes L$ on a

$$\mu(G') < \mu(G) \text{ (resp. } \leq \text{)}$$

Lorsque G est localement libre, on dira qu'une telle paire $F = (G, \varphi)$ est un fibré de Higgs sur (C, L) . Quand on prend pour L le fibré canonique ω_C c'est donc la notion standard de fibré de Higgs introduite par Hitchin [7] et Simpson [20]; [19]. On définit de manière évidente la notion de morphisme de faisceaux de Higgs. Quand on fixe le rang r et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ , on obtient pour les fibrés de Higgs stables un espace de module grossier : c'est une variété algébrique quasi-projective, dont les points correspondent aux classes d'isomorphisme de fibrés de Higgs. On peut aussi définir la notion de filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré de Higgs, qui nous sera utile un peu plus tard : il s'agit de filtration croissante

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k = F$$

par des sous-faisceaux de Higgs, tels que les quotients $gr_i = F_i/F_{i-1}$ soient semi-stables, et que la pente $i \mapsto \mu_i := \mu(gr_i)$ soit strictement décroissante. On pose $\mu_{\max}(F) := \mu_1$ et $\mu_{\min}(F) := \mu_k$.

Définition 3.8. Soit $F = (G, \varphi)$ un faisceau de Higgs sur (C, L) . La cohomologie $H^i(F)$ de F est définie par l'hypercohomologie du complexe

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} G \otimes L \rightarrow 0$$

Cet espace vectoriel de cohomologie est donc de dimension finie, et nul pour $q > 2$. Étant donnés deux fibrés de Higgs $F' = (G', \varphi')$ et $F'' = (G'', \varphi'')$ on définit le fibré de Higgs $\text{Hom}(F', F'')$ par la paire $(\text{Hom}(G', G''), \varphi)$ où φ est donné par la formule $\varphi(f) = \varphi''f - f\varphi'$, où f est une section locale du fibré des homomorphismes $\text{Hom}(G', G'')$. On posera

$$\text{Ext}^q(F', F'') = H^q(\text{Hom}(F', F''))$$

Ainsi, $\text{Ext}^0(F', F'')$ s'identifie à l'espace vectoriel $\text{Hom}(F', F'')$ des morphismes de fibrés de Higgs $F' \rightarrow F''$. Le dual d'un L -fibré de Higgs $F = (G, \varphi)$ est défini par la paire $(G^* \otimes L^*, {}^t\varphi)$, où $G^* \otimes L^*$ est muni du morphisme transposé ${}^t\varphi : G^* \otimes L^* \rightarrow G^*$.

PROPOSITION 3.9. Soit $F = (G, \varphi)$ un fibré de Higgs sur (C, L) , avec G de rang r et caractéristique d'Euler-Poincaré χ .

(1) (Formule de Riemann-Roch) On a

$$\sum_q (-1)^q \dim H^q(F) = -rl.$$

(2) (Dualité de Serre) On a un isomorphisme canonique

$$H^q(F) \simeq H^{2-q}(F^* \otimes \omega_C)^*$$

Démonstration. On a

$$\sum_q (-1)^q \dim H^q(F) = \chi(G) - \chi(G \otimes L).$$

L'assertion (1) est donc une conséquence triviale de la formule de Riemann-Roch. Pour l'assertion (2) il suffit d'appliquer le théorème de dualité de Serre en hypercohomologie au complexe $0 \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} G \otimes L \rightarrow 0$. $\square$

Description de U_a . Considérons une droite projective P_1 ne passant pas par a , et la projection canonique $\pi: P_2 - \{a\} \rightarrow P_1$ de centre a . L'ouvert $P_2 - \{a\}$ s'identifie à l'espace total du fibré normal $N = \mathcal{O}_{P_1}(1)$ de P_1 dans P_2 .

PROPOSITION 3.10. *Soit N le fibré normal de P_1 dans le plan projectif P_2 . L'ouvert U_a de $N_{P_2}(r, \chi)$ est isomorphe à l'espace de modules grossier des classes d'isomorphisme de fibrés de Higgs stables (G, φ) sur (P_1, N) .*

Démonstration. La correspondance s'obtient de la manière suivante : au faisceau stable F sur P_2 , dont le support ne passe pas par a , on associe l'image directe $G = \pi_*(F)$; comme F est pur, ce faisceau est localement libre de rang r ; il est muni d'une structure de $\pi_*(\mathcal{O}_N)$ -module, ce qui fournit un morphisme $\varphi: G \rightarrow G \otimes N$. Réciproquement, un tel morphisme définit une structure de module sur l'algèbre $\pi_*(\mathcal{O}_N)$ et par suite un faisceau cohérent sur l'espace total $N = P_2 - \{a\}$ à support fini au-dessus de P_1 ; ce faisceau est pur et a pour support la courbe spectrale associée au morphisme φ , c'est la courbe définie le déterminant $\gamma \in H^0(N^{\otimes r})$ du morphisme

$$\varphi - \lambda \text{id}_G: \pi^*(G) \rightarrow \pi^*(G) \otimes \pi^*(N)$$

où λ est la section canonique du fibré $\pi^*(N)$. Le faisceau F associé est alors le conoyau du morphisme $\psi = (\varphi - \lambda \text{id}_G) \otimes \text{id}_{N^{-1}}$. Les deux constructions sont inverses l'une de l'autre ([6], exercice 5.17). Il est clair que si le faisceau F est stable, le fibré de Higgs (G, φ) est stable; réciproquement, un fibré de Higgs (G, φ) stable fournit par la construction ci-dessus un faisceau stable: ceci résulte du fait que la multiplicité et le caractèreistique d'Euler-Poincaré sont invariantes par image directe. $\square$

Définition 3.11. *Etant donné un faisceau localement libre G sur P_1 , on écrit $G = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}(k)^{r_k}$. La suite des entiers k tels que $r_k \neq 0$ s'appelle le spectre de G . Les entiers r_k sont les multiplicités.*

Ce spectre est donc déterminé par la suite $k \mapsto h^0(G(-k))$.

LEMME 3.12. *Si (G, φ) est un fibré de Higgs semi-stable sur (P_1, N) , le spectre de G est connexe.*

Démonstration. Ceci signifie que l'ensemble des entiers k tels que $r_k \neq 0$ est un intervalle de $\mathbb{Z}$. Si le spectre n'était pas connexe, on pourrait écrire $G = G' \oplus G''$, avec $\text{Hom}(G', G''(1)) = 0$, de sorte que la matrice de φ serait de la forme

$$\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Mais on a l'inégalité $\mu(G') > \mu(G'')$, ce qui contredit la semi-stabilité de la paire (G, φ) . $\square$

Définition 3.13. *On dit qu'un fibré de Higgs $F = (G, \varphi)$ sur (P_1, N) est quasi-rigide si G est rigide, c'est-à-dire si*

$$\text{Ext}^1(G, G) = 0.$$

Ceci signifie donc que le spectre de G est connexe et réduit à au plus deux points. Dans le cas normalisé $0 \leq \chi < r$, ceci signifie donc que $G = \mathcal{O}^{\chi} \oplus \mathcal{O}(-1)^{r-\chi}$.

PROPOSITION 3.14. *Dans l'ouvert U_a , les points correspondants aux fibrés de Higgs quasi-rigides sur $(\mathbf{P}_1, N)$ constituent un ouvert dont le complémentaire est de codimension ≥ 2 si $\chi \neq 0 \bmod r$, et si $\chi = 0 \bmod r$, une hypersurface irréductible dont le fibré inversible associé est le fibré déterminant.*

Démonstration. La construction de U_a peut se faire de la manière suivante : on considère un entier m assez grand pour que toute paire (G, φ) de U_a le fibré $G(m)$ soit engendré par ses sections et tel que $h^1(G(m)) = 0$. Etant donné un espace vectoriel H de dimension $n = rm + \chi$ on considère le fibré vectoriel $E = H \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(-m)$ le schéma de Hilbert-Grothendieck $\mathbf{Hilb}^{r,\chi}(E)$ des faisceaux quotients G de rang r et caractéristique d'Euler-Poincaré χ , et le faisceau universel quotient $\mathcal{G}$ sur le produit $\mathbf{Hilb}^{r,\chi}(E) \times \mathbf{P}_1$ et on désigne par p et q les projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hilb}^{r,\chi}(E) \times \mathbf{P}_1 & \xrightarrow{p} & \mathbf{P}_1 \\ q \downarrow & & \\ \mathbf{Hilb}^{r,\chi}(E) & & \end{array}$$

On considère le faisceau algébrique cohérent sur $\mathbf{Hilb}^{r,\chi}(H \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(-m))$ défini par $\mathcal{E} = \text{Ext}_q^1(\mathcal{G}, \mathcal{G}(-3))$; sa fibre au-dessus d'un point représentant un faisceau quotient G est $\text{Ext}^1(G, G(-3))$. Considérons le fibré vectoriel (au sens de Grothendieck)

$$\nu = \text{Vect}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Hilb}^{r,\chi}(E)$$

associé : les points de ν correspondent aux fibrés de Higgs (G, φ) , où G est un quotient de E et φ est une forme linéaire sur $\text{Ext}^1(G, G(-3))$, c'est-à-dire, par dualité de Serre, un élément de $\text{Hom}(G, G(1))$. Considérons, dans ν l'ouvert ν^s des paires (G, φ) satisfaisant aux conditions suivantes :

- (1) le faisceau de Higgs (G, φ) stable.
- (2) le morphisme $H \rightarrow H^0(G(m))$ induit par le morphisme d'évaluation est un isomorphisme.

Alors le groupe $PGL(H)$ opère librement sur ν^s et l'ouvert U_a est un quotient géométrique de ν^s par $PGL(H)$. La variété ν^s est isomorphe à un ouvert de la variété Ω^{ss} considérée dans la section 2.1, et donc lisse irréductible de dimension $n^2 + r^2$ d'après la proposition 2.3 et la section 3.1. Au voisinage d'une orbite O de $PGL(H)$ dans $\mathbf{Hilb}^{r,\chi}(E)$ d'un point représentant un quotient G satisfaisant à la condition (2), le schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}^{r,\chi}(E)$ est lisse de dimension $n^2 - r^2$, et au-dessus d'une telle orbite, le fibré ν est de rang constant ρ , donné par la formule suivante

$$\rho = 2r^2 + \dim \text{Ext}^1(G, G(1))$$

où G un quotient de E représentant un point de cette orbite. Désignons par ν_o l'image réciproque de O dans ν^s . La codimension de l'orbite O dans $\mathbf{Hilb}^{r,\chi}(E)$ est donnée par $\dim \text{Ext}^1(G, G)$ et donc la variété localement

fermée v_0 a pour codimension $\dim \operatorname{Ext}^1(G, G) - \dim \operatorname{Ext}^1(G, G(1))$. Si on écrit $G = \bigoplus_k \mathcal{O}(k)^{r_k}$ cette codimension est

$$\sum_{i \geq 2} r_i r_i$$

En raison de la propriété de connexité, le seul cas où v_0 est de codimension 1 dans v^s est celui où $G \simeq \mathcal{O}(k+1) \oplus \mathcal{O}(k)^{r-2} \oplus \mathcal{O}(k-1)$: ceci entraîne $\chi = r(k+1)$ et donc $\chi = 0 \pmod{r}$. La variété v_0 est alors une variété irréductible de codimension 1. Ainsi, les points de v^s représentant des fibrés de Higgs (G, φ) non quasi-rigides forment un fermé (par le théorème de semi-continuité) $PGL(H)$ -invariant de codimension ≥ 2 dans le cas $\chi \neq 0 \pmod{r}$ et irréductible de codimension 1 dans le cas $\chi = 0 \pmod{r}$. Puisque la projection $v^s \rightarrow U_a$ est lisse de dimension relative $r^2 - 1$, on aura la même chose pour l'image dans U_a . $\square$

Démonstration de la proposition 3.6. Désignons par U_{a,rt_0} l'ouvert de U_a représentant des fibrés de Higgs quasi-rigides. Considérons un point de $\operatorname{Hilb}^{r, \chi}$ représentant un quotient rigide G de E , et désignons par O son orbite. Considérons d'autre part l'ouvert $\operatorname{Hom}^s(G, G(1))$ des morphismes $G \rightarrow G(1)$ tels que la paire (G, φ) soit stable; le groupe des automorphismes $\operatorname{Aut}(G)$ de G s'identifie au stabilisateur de G dans $\mathcal{G}(H)$; ce groupe agit sur $\operatorname{Hom}(G, G(1))$ par conjugaison et dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}^s(G, G(1)) & \xrightarrow{j} & v_0 \\ \searrow g & & \downarrow f \\ & & U_{a,rt_0} \end{array}$$

le morphisme d'inclusion j est compatible avec les actions des groupes $\operatorname{Aut}(G)$ et $GL(H)$. Le morphisme vertical de droite est un quotient géométrique; du fait que O est l'orbite du point de $\operatorname{Hilb}^{r, \chi}(E)$ défini par le quotient G , il résulte que g est aussi un quotient géométrique par l'action du groupe $\operatorname{Aut}(G)$. Remarquons par ailleurs que cette action se quotientte par $P\operatorname{Aut}(G) := \operatorname{Aut}(G)/\mathbb{C}^*$ en une action libre.

LEMME 3.15. *Le complémentaire de l'ouvert $\operatorname{Hom}^s(G, G(1))$ est de codimension 2 dans $\operatorname{Hom}(G, G(1))$.*

Ce lemme sera démontré plus bas. Voyons d'abord comment il entraîne la proposition 3.6. On supposera ici que G est normalisé. Il résulte de ce lemme qu'il n'y a pas d'autres fonctions régulières inversibles sur $\operatorname{Hom}^s(G, G(1))$ que les constantes. On a alors un isomorphisme

$$\operatorname{Pic}^{P\operatorname{Aut}(G)}(\operatorname{Hom}^s(G, G(1))) \simeq \operatorname{Char}(P\operatorname{Aut}(G))$$

où le second membre désigne le groupe des caractères, et le morphisme canonique

$$\operatorname{Pic}(U_{a,rt_0}) \rightarrow \operatorname{Char}(P\operatorname{Aut}(F))$$

est injectif. Pour vérifier qu'il est surjectif, il suffit de constater que le caractère associé au fibré déterminant $\mathcal{D}$ engendre le groupe $\operatorname{Char}(P\operatorname{Aut}(G))$. Considérons les faisceaux quotients universels $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur $v^s \times \mathbb{P}_2$ et

$v^s \times \mathbf{P}_1$ respectivement. En restriction à la fibre de v^s au-dessus du point correspondant au quotient G on a des isomorphismes

$$\mathcal{O} \otimes H^1(G(-1)) \simeq R^1 q_*(\mathcal{F}(-1))$$

$$\mathcal{O} \otimes H^0(G) \simeq q_*(\mathcal{F})$$

De plus, ces isomorphismes sont compatibles avec l'action du stabilisateur de G , c'est-à-dire $\text{Aut}(G)$. Par définition, le fibré déterminant correspond sur v^s au fibré $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\tau)$, et on a donc sur $\text{Hom}^s(G, G(1))$

$$\mathcal{L} = \mathcal{O} \otimes (\det H^1(G(-1)))^{\otimes \frac{\chi}{s}} \otimes (\det H^0(G))^{\otimes \frac{\chi-1}{s}}$$

Ce fibré inversible induit le caractère trivial dans le cas $\chi = 0$ (il n'y en a pas d'autre); dans le cas où $0 < \chi \leq r$, le groupe des automorphismes de $G = \mathcal{O}^x \oplus \mathcal{O}(-1)^{r-x}$ est formé de matrices f de la forme

$$f = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Le groupe des caractères de $P\text{Aut}(G)$ est donné par les homomorphismes $f \mapsto (\det \alpha)^k (\det \beta)^l$ où les entiers k et l satisfont à l'équation $k\chi + l(r - \chi) = 0$. Le caractère correspondant au fibré déterminant est donné par

$$f \mapsto (\det \alpha)^{\frac{\chi-r}{s}} (\det \beta)^{\frac{\chi}{s}}.$$

C'est bien un générateur du groupe des caractères : ainsi, le fibré déterminant engendre $\text{Pic}(U_{a,rig})$. Compte-tenu du lemme 3.14 ceci démontre la proposition 3.6. $\square$

La famille des fibrés de Higgs quasi-rigides. Soit $F = (G, \varphi)$ un fibré de Higgs sur $(\mathbf{P}_1, \mathcal{O}(1))$. On considère le schéma de Hilbert-Grothendieck $\text{Hilb}^{r,\chi}(F)$ des faisceaux quotients $G'' = G/G'$, de rang r'' et caractéristique χ'' , tels que $\varphi(G') \subset G'(1)$. La paire $F'' = (G', \varphi')$, avec $\varphi' = \varphi|_{G'}$, définit un sous-faisceau de Higgs; soit $F''' = (G'', \varphi'')$ le quotient F''/F' . Le schéma $\text{Hilb}^{r'',\chi''}(F)$ est un schéma projectif, dont l'espace tangent en un point q défini par le quotient $F''' = F''/F'$ est l'espace vectoriel $\text{Hom}(F', F''')$ des morphismes de faisceaux de Higgs.

On pose $S = \text{Hom}(G, G(1))$. La construction du schéma de Hilbert-Grothendieck peut se faire de manière relative au-dessus de S : on a une famille universelle $\mathcal{F}$ de fibrés de Higgs paramétrée par S et le schéma de Hilbert-Grothendieck relatif

$$\text{Hilb}^{r,\chi}(\mathcal{F}/S) \xrightarrow{\varphi} S$$

représente les couples (φ, F'') formés d'un élément $\varphi \in S = \text{Hom}(G, G(1))$ et d'un faisceau quotient de Higgs $F'' = F'/F'$ du fibré de Higgs $F = (G, \varphi)$. C'est donc le sous-schéma fermé du produit $S \times \text{Hilb}^{r,\chi}(G)$ des couples $(\varphi, G'' = G/G')$ défini par la condition suivante : le morphisme composé

$$G' \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\varphi} G(1) \xrightarrow{j} G''(1)$$

est nul.

LEMME 3.16 Soit q un point de $\mathbf{Hilb}'' \times''(\mathcal{F}/S)$ correspondant à un fibré de Higgs quotient $F'' = F/F'$ de $F = (G, \varphi)$.

On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Hom}(F', F'') \rightarrow T_q \mathbf{Hilb}'' \times''(\mathcal{F}/S) \xrightarrow{T_q \varphi} \mathbf{Hom}(G, G(1)) \xrightarrow{\delta} \mathbf{Ext}^1(F', F'')$$

Cette suite exacte est la version de Higgs de la proposition 1.5 de [3], mais elle bien plus facile à prouver pour la famille de fibrés de Higgs que l'on considère ici.

Démonstration. Au point q , l'espace tangent de Zariski $T_q \mathbf{Hilb}'' \times''(\mathcal{F}/S)$ est donné par les couples $(u, v) \in \mathbf{Hom}(G, G(1)) \times \mathbf{Hom}(G', G'')$ qui satisfont, avec les notations ci-dessus, à l'équation $j u + \varphi'' v - v \varphi' = 0$. La flèche δ est définie de la manière suivante : pour $u \in \mathbf{Hom}(G, G(1))$, $\delta(u)$ est la classe de $j u$ dans le conoyau du morphisme $v \mapsto \varphi'' v - v \varphi'$:

$$\mathbf{Hom}(G', G'') \rightarrow \mathbf{Hom}(G', G''(1))$$

La suite exacte d'hypercohomologie identifie ce conoyau à un sous-espace de $\mathbf{Ext}^1(F', F'')$, ce qui définit la flèche δ . L'application linéaire tangente $T_q \varphi$ est donnée par $(u, v) \mapsto u$. Son noyau s'identifie à l'espace tangent de Zariski au schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}'' \times''(F)$, c'est-à-dire à $\mathbf{Hom}(F', F'')$; de la formule ci-dessus, il découle qu'un élément $u \in \mathbf{Hom}(G, G(1))$ provient de $T_q \mathbf{Hilb}'' \times''(\mathcal{F}/S)$ si et seulement si $\delta(u) = 0$. Ceci fournit la suite exacte du lemme. $\square$

LEMME 3.17. On garde les notations du lemme précédent, et on suppose que G est rigide, et que $\mu_{\min}^-(F') \geq \mu_{\max}^-(F'')$. Alors la flèche δ ci-dessus est surjective.

Démonstration. La suite exacte d'hypercohomologie fournit une suite exacte

$$\mathbf{Hom}(G, G(1)) \rightarrow \mathbf{Ext}^1(F, F) \rightarrow \mathbf{Ext}^1(G, G)$$

et l'hypothèse de rigidité implique que la flèche $\mathbf{Hom}(G, G(1)) \rightarrow \mathbf{Ext}^1(F, F)$ est surjective. La flèche de liaison δ du lemme 3.16 est la composée

$$\mathbf{Hom}(G, G(1)) \rightarrow \mathbf{Ext}^1(F, F)$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{Ext}^1(F', F'')$$

où la flèche verticale est induite par l'inclusion $F' \hookrightarrow F$ et la projection $F \rightarrow F''$. Il suffit donc de vérifier que cette flèche verticale est surjective. Mais en vertu de la suite spectrale d'un complexe filtré, il suffit de vérifier que l'on a

$$\mathbf{Ext}^2(F', F'') = \mathbf{Ext}^2(F'', F'') = 0$$

$$\mathbf{Ext}^2(F'', F') = 0$$

Par dualité de Serre, il revient au même de vérifier que

$$\mathbf{Hom}(F', F'(-3)) = \mathbf{Hom}(F'', F''(-3)) = 0$$

$$\mathbf{Hom}(F'', F'(-3)) = 0$$

Mais du fait que G est rigide, et de l'hypothèse $\mu_{\min}(F') \geq \mu_{\max}(F'')$ il résulte que l'on a $0 \leq \mu_{\max}(F') - \mu_{\min}(F'') \leq 1$, $\mu_{\max}(F') - \mu_{\min}(F') \leq 1$, et $\mu_{\max}(F'') - \mu_{\min}(F'') \leq 1$. Il en découle immédiatement les égalités ci-dessus, et par suite la surjectivité du morphisme δ .

Démonstration du lemme 3.15. Les points $\varphi \in S$ pour lesquels le fibré de Higgs $F = (G, \varphi)$ n'est pas stable sont ceux pour lesquels il existe un sous-fibré de Higgs $F' \subset F$ de rang r' satisfaisant aux conditions du lemme 3.17. Autrement dit, un tel point est l'image d'un point $q \in \text{Hilb}^{r'' \times r'}(\mathcal{F}/S)$ par le morphisme ρ représentant un fibré de Higgs $F'' = F/F'$, et l'on a la condition $\mu_{\min}(F') \geq \mu_{\max}(F'')$. En un tel point l'application linéaire tangente à ρ est de rang $\leq \dim S - \dim \text{Ext}^1(F', F'')$. On a, puisque F est quasi-rigide, $\text{Ext}^2(F, F) = 0$, et par suite $\text{Ext}^2(F', F'') = 0$. Par la formule de Riemann-Roch 3.9, ceci entraîne $\dim \text{Ext}^1(F', F'') \geq r'r''$, et par suite $T_{\rho} \rho$ est de rang $\leq \dim S - r'r''$.

Il résulte du théorème de Bertini-Sard point φ appartient à une réunion finie de sous-variétés fermées de codimension $\geq r - 1$. En dehors de ces sous-variétés, le fibré de Higgs F est stable. D'où le lemme. $\square$

Le complémentaire de U_a . Pour calculer le groupe de Picard de $N_{P_2}^s(r, \chi)$, il reste vérifier le lemme suivant :

LEMME 3.18. Soit $a \in P_2$; le complémentaire de l'ouvert U_a dans $N_{P_2}^s(r, \chi)$ est une hypersurface irréductible.

Fin de la démonstration du théorème 3.5. Le complémentaire de U_a dans $N_{P_2}^s(r, \chi)$ est une hypersurface qu'on peut décrire comme schéma des zéros du fibré $\mathcal{L}(a)$. Ceci entraîne que le groupe $\text{Pic}(N_{P_2}^s(r, \chi))$ est un groupe abélien libre à 2 générateurs : on peut choisir comme base $(\mathcal{O}, \mathcal{L}(a))$. Ceci entraîne aussi, compte-tenu du fait que $N_{P_2}(r, \chi)$ est une variété normale, que l'inclusion de l'ouvert des points lisses dans $N_{P_2}(r, \chi)$ induit un isomorphisme sur les groupes de Picard. Par suite, la variété $N_{P_2}(r, \chi)$ est localement factorielle.

Démonstration du lemme 3.18. Soient a et b deux points de P_2 . Changeant les rôles de a et b , il s'agit de montrer que les faisceaux F dont le support ne contient pas le point b est une hypersurface irréductible. Considérons l'isomorphisme

$$\text{Hom}^s(G, G(1))/\text{Aut}(G) \simeq U_{a, riq}$$

Si (G, φ) est la paire associée à F sur P_1 , le support du faisceau F est donné par les couples $(x, \lambda) \in N$ tels que $\det(\varphi(x) - \lambda \text{id}_{G(x)}) = 0$. Puisque le fibré $\text{Hom}(G, G(1))$ est engendré par ses sections, ceci définit, pour (x, λ) fixés une hypersurface irréductible de $\text{Hom}^s(G, G(1))$, invariante par le groupe des automorphismes de G . Par passage au quotient, ceci définit dans l'ouvert $U_{a, riq}$ une hypersurface irréductible (propriété de bon quotient). Dans le cas $\chi \neq 0 \pmod r$ ceci entraîne que l'hypersurface complémentaire de U_b dans U_a est irréductible.

Dans le cas $\chi = 0 \bmod r$, on doit encore vérifier que cette hypersurface ne contient pas l'hypersurface irréductible des paires de U_a non rigides. Il suffit de vérifier que si $G = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)^{r-2} \oplus \mathcal{O}(-2)$ dans l'ouvert $\text{Hom}^*(G, G(1))$ les morphismes φ définissant des paires (G, φ) qui n'appartiennent pas à U_b définissent encore une hypersurface. Ici le fibré $\text{Hom}(G, G(1))$ n'est plus engendré par ses sections; cependant, l'image du morphisme d'évaluation en x

$$\text{Hom}(G, G(1)) \rightarrow \text{Hom}(G, G(1))(x)$$

est un hyperplan distinct de l'hypersurface irréductible homogène de degré r des applications linéaires $G(x) \rightarrow G(x)(1)$ de déterminant nul. Donc cette hypersurface coupe l'hyperplan image de $\text{Hom}(G, G(1))$ suivant un fermé de codimension 2. Par suite, il existe des paires non rigides de U_a qui appartiennent à U_b . D'où le lemme. $\square$

3.3. Le faisceau universel

THÉORÈME 3.19.

1. Si r et χ sont premiers entre eux il existe sur $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi) \times \mathbf{P}_2$ un faisceau universel.

2. Soit U un ouvert de $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi)$. Si r et χ ne sont pas premiers entre eux il n'existe pas de faisceau universel sur $U \times \mathbf{P}_2$.

La première partie de cet énoncé est analogue au résultat bien connu de Maruyama pour les faisceaux semi-stables sans torsion. La deuxième partie est un cas particulier d'un énoncé de N. Mestrano et S. Ramanan [16] pour le groupe de Picard relatif. La démonstration que nous en donnons ici est différente, et inspirée de celle qu'ont donnée Drézet et Narasimhan [4] pour les fibrés vectoriels sur les courbes; elle repose sur l'étude de l'existence de fibrés inversibles munis d'une action de $GL(H)$ sur l'ouvert Ω^s du schéma de Hilbert. Cette étude fait intervenir de manière essentielle les points semi-stables non stables.

Existence. On reprend les notations des § 2.1, 2.3 et 3.1. Considérons, sur le produit $\text{Hilb}^{r,\chi}(B) \times \mathbf{P}_2$ le faisceau universel $\mathcal{F}$ et, pour $\xi \in K(\mathbf{P}_2)$, le faisceau inversible $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\xi)$ sur le schéma de Hilbert-Grothendieck $\text{Hilb}^{r,\chi}(B)$. Ce fibré inversible est muni d'une action naturelle du groupe $GL(H)$. Si $c \in K_{1,0}(\mathbf{P}_2)$ est la classe déterminée dans le groupe de Grothendieck topologique par (r, χ) , l'action induite sur le centre $\mathbb{C}^*$ est donnée par

$$\alpha \mapsto \alpha^{c, \xi}$$

Si r et χ sont premiers entre eux, il est possible de choisir ξ de sorte que $\langle c, \xi \rangle = 1$. Posons $L = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\xi)$, et considérons sur l'ouvert $\Omega^{ss} \times \mathbf{P}_2$ le morphisme d'inclusion $i = u \otimes id_{L^{-1}} : \mathcal{A} \otimes q^*(L^{-1}) \rightarrow \mathcal{B} \otimes q^*(L^{-1})$, où q désigne la première projection $\Omega^{ss} \times \mathbf{P}_2 \rightarrow \Omega^{ss}$. Ces fibrés sont en fait des $PGL(H)$ -fibrés vectoriels, qui se quotientent sur $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi) \times \mathbf{P}_2$ et le conoyau du morphisme obtenu par passage au quotient est une famille de universelle sur $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi) \times \mathbf{P}_2$.

Non-existence. Supposons que r et χ ne soient pas premiers entre eux, et qu'il existe une famille universelle de faisceaux paramétrée par un ouvert U de $\mathbf{N}_{\mathbb{P}_2}^s(r, \chi)$. On obtient une famille universelle $\mathcal{F}'$ paramétrée par l'image réciproque U' de U ; considérons la projection $q: U' \times \times \mathbf{P}_2 \rightarrow U'$. Le faisceau $\mathcal{L} = \text{Hom}_q(\mathcal{F}', \mathcal{F})$ est d'après le théorème de semi-continuité un fibré inversible; par ailleurs, il est muni d'une action de $GL(H)$, et l'action induite par le centre $\mathbb{C}^*$ est donnée par $\alpha \rightarrow \alpha \text{id}_{\mathcal{L}}$. Mais ce fibré vectoriel s'étend à l'ouvert Ω^s en un $GL(H)$ -fibré vectoriel. Que le fibré sous-jacent s'étende est bien sûr évident; pour étendre l'action de $GL(H)$ il suffit, la question étant locale au-dessus de l'espace de modules $\mathbf{N}_{\mathbb{P}_2}(r, \chi)$, de vérifier le lemme suivant:

LEMME 3.20. *Soit X une variété affine lisse et irréductible, sur laquelle opère un groupe réductif et connexe G , $f \in \mathcal{O}(X)$ un élément non nul invariant par l'action de G . Soit U l'ouvert défini par $f \neq 0$. Soit L un fibré inversible sur X . Toute action linéaire de G sur le fibré $L|_U$ s'étend à X .*

Démonstration. En procédant pas à pas, on peut supposer que l'élément f est irréductible dans l'anneau des coordonnées $\mathcal{O}(X)$. Désignons par $\sigma: (g, x) \mapsto gx$ le morphisme $G \times X \rightarrow X$ qui définit l'action de G . La structure de G -fibré vectoriel est alors donnée par un morphisme de fibres vectoriels $\varphi: L|_{G \times U} \rightarrow \sigma^*(L)|_{G \times U}$. On note $\varphi(g, x): L(x) \rightarrow L(gx)$ l'application linéaire (inversible) induite sur la fibre, pour $g \in G$ et $x \in U$. On a alors $\varphi(g'g, x) = \varphi(g', gx)\varphi(g, x)$ pour $g, g' \in G$ et $x \in U$. On peut alors écrire sur $G \times U$

$$\varphi(g, x) = \frac{\psi(g, x)}{f^n(x)}$$

où $\psi: L \rightarrow \sigma^*(L)$ est un morphisme de fibrés vectoriels inversibles sur $G \times X$, et où n est un entier relatif, qu'on prendra le plus petit possible. Soit e l'élément neutre de G . Cette identité montre, pour $g = e$ que l'on a $\psi(e, x) = f^n(x)$, sur U , et par suite $n \geq 0$. L'hypersurface des zéros de ψ est contenue dans l'hypersurface d'équation $f=0$. La variété X étant lisse et f irréductible, l'hypersurface des zéros de f est intègre, et G étant connexe, il en est de même de son image réciproque dans $G \times X$. Or, d'après la définition d'une action de G et du fait que f est invariant, on obtient pour $(g, x) \in G \times X$

$$\psi(g'g, x) f^n(x) = \psi(g', gx) \psi(g, x)$$

Si $n > 0$, ceci entraîne que f divise ψ . Mais ceci contredit la définition de l'entier n . Par suite, $n = 0$ et ψ ne s'annule pas sur $G \times X$. Ainsi, ψ définit une action de G qui prolonge φ .

Fin de la démonstration du théorème 3.19. Soient $\delta = \text{pgcd}(r, \chi)$ et F' un faisceau stable de dimension 1, de multiplicité $r' = \frac{r}{\delta}$ et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi' = \frac{\chi}{\delta}$. Considérons le faisceau $F = F' \otimes \otimes \mathbb{C}^{\delta}$, isomorphe à la somme directe de δ exemplaires de F' . Ce faisceau

définit un point de $N_{P_2}(r, \chi)$ et l'entier m étant choisi comme au § 2.1, le choix d'un isomorphisme $\tau: H \simeq H^0(F(m))$ définit un point (F, τ) de Ω'' . Le stabilisateur de ce point dans $Gl(H)$ est isomorphe au groupe des automorphismes de F . La décomposition en somme directe ci-dessus induit un isomorphisme

$$H^0(F(m)) = H^0(F''(m)) \otimes \mathbb{C}^\delta$$

Le groupe des automorphismes de F est isomorphe au groupe linéaire $Gl(\delta, \mathbb{C})$, et ce groupe se plonge comme sous-groupe de $Gl(H)$ via l'homomorphisme

$$\text{Aut}(F) = Gl(\delta, \mathbb{C}) \hookrightarrow Gl(H^0(F(m))) \simeq Gl(H),$$

défini par $g \mapsto id_{H^0(F(m))} \otimes g$. Considérons le fibré inversible $\mathcal{L}$ construit ci-dessus, muni de l'action de $Gl(H)$. Au-dessus du point ci-dessus, on associe à ce $Gl(H)$ -fibré inversible un caractère de $\text{Aut}(F)$, donc de la forme $g \mapsto (\det g)^k$ pour $g \in \text{Aut}(F) = Gl(\delta, \mathbb{C})$ et k entier. En restriction au centre $\mathbb{C}^* \subset \text{Aut}(F)$, on obtient l'homomorphisme

$$\alpha \mapsto \alpha^{k\delta}.$$

Mais par construction on sait que l'action induite par un élément $\alpha \in Gl(H)$ sur $\mathcal{L}$ est l'homothétie de rapport α au-dessus de l'ouvert U' . Par densité, ceci est encore vrai sur l'ouvert irréductible Ω'' , et devrait donc être vrai au point défini par (F, τ) . Ceci impose $\delta = 1$ et donc r et χ premiers entre'eux. $\square$

Remarque 3.21. Le lemme 3.20 est analogue au lemme 5.2 de Drézet et Narasimhan [4]. Cependant, dans notre situation, le complémentaire de l'ouvert invariant U est de codimension 1. Ceci permet d'éviter l'argument de Drézet et Narasimhan de passage au fibré en espace projectif, ce qui est crucial dans notre situation. Il permettrait aussi de traiter directement les cas particuliers qui doivent être étudiés à part dans la démonstration de Drézet et Narasimhan.

4. TRANSFORMÉE DE FOURIER

L'objet de ce chapitre est de donner une illustration du théorème principal: il s'agit de comparer certains espaces de modules de faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif P_2 et les espaces de modules classiques de faisceaux semi-stables sans torsion sur l'espace projectif dual. La correspondance se fait au travers de la transformation de Fourier.

4.1. Le morphisme Φ

Considérons le diagramme standard

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & P_2 \\ \eta \downarrow & & \\ P_2^* & & \end{array}$$

où D est la variété d'incidence des paires (droites, points). Si F est faisceau stable de dimension 1, de multiplicité r et caractéristique $\chi = 0$ sur $\mathbf{P}_2$, le faisceau $F' = q_*(p^*(F(2)))(-1)$ est en général un faisceau stable sur $\mathbf{P}_2^*$ de rang $r' = r$, de classe de Chern $c_1' = 0$ et $c_2' = r$; que l'on appellera transformé de Fourier de F . On obtient alors une correspondance birationnelle (cf. Maruyama [15]):

$$\Phi: N_{\mathbf{P}_2}(r, 0) \dashrightarrow M_{\mathbf{P}_2^*}(r; 0, r)$$

L'application réciproque, définie sur un ouvert partout dense, associe à un faisceau stable F' le faisceau $F = R^1p_*(q^*(F'(-1)))(-1)$ porté par les droites de saut de F' . Dans les cas $r \leq 4$, on verra qu'on peut prolonger le morphisme Φ à l'espace de modules lui-même. Commençons par vérifier que si F est semi-stable, le faisceau $q_*(p^*(F(2)))$ est sans torsion et a les classes de Chern attendues. Ceci résulte de l'énoncé plus général suivant :

LEMME 4.1. *Si F est un faisceau semi-stable de dimension 1 et multiplicité $\chi \geq 0$ sur le plan projectif $\mathbf{P}_2$, on a $R^1q_*(p^*(F)) = 0$ et le faisceau $F' = q_*(p^*(F))$ est un faisceau sans torsion de rang $r' = r$, de classe de Chern $c_1' = \chi - r$ et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi' = \chi$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $R^1q_*(p^*(F)) = 0$. Il suffit de prouver que si l est une droite de $\mathbf{P}_2$, on a $H^1(F|_l) = 0$. Mais $F|_l$ est un quotient de F ; s'il est de dimension 0, le résultat est évident. S'il est de dimension 1, il n'est peut-être pas pur, mais il a un quotient pur de dimension 1 : c'est un faisceau localement libre sur l qui se décompose en somme directe de fibrés inversibles d'après le théorème de Grothendieck. Chacun de ces faisceaux inversibles est encore un quotient de F , donc de caractéristique d'Euler-Poincaré > 0 d'après l'hypothèse de stabilité. Par suite $H^1(F|_l) = 0$. Il résulte de la formule de Riemann-Roch que l'image directe $q_*(p^*(F))$ a les classes de Chern de l'élément de $K(\mathbf{P}_2^*)$ défini par $q_*(p^*(F))$; par suite il a les classes de Chern attendues.

Pour voir que $q_*(p^*(F))$ est sans torsion, on choisit une résolution

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow 0$$

avec B somme directe de faisceaux inversibles sur le plan projectif, chacun d'eux étant de degré < 0 . On a alors $q_*(p^*(B)) = 0$ ce qui conduit à la suite exacte

$$0 \rightarrow q_*(p^*(F)) \rightarrow R^1q_*(p^*(A)) \rightarrow R^1q_*(p^*(B)) \rightarrow 0$$

Mais puisque F est de Cohen-Macaulay, A est localement libre, et $p^*(A)$ est plat sur $\mathbf{P}_2^*$. Par le théorème de semi-continuité, l'image directe $R^1q_*(p^*(A))$ est localement libre. Alors le sous-faisceau $q_*(p^*(F))$ est sans torsion. $\square$

On désigne par $Q_{\mathbf{P}_2}$ le fibré quotient canonique sur le plan projectif $\mathbf{P}_2$.

LEMME 4.2. *Le morphisme Φ est défini sur le complémentaire du diviseur Θ dans $N_{\mathbf{P}_2}(r, 0)$ et induit un isomorphisme sur l'ouvert des points de $M_{\mathbf{P}_2^*}(r; 0, r)$ représentant des faisceaux polystables F' qui sont triviaux sur au moins une droite de $\mathbf{P}_2^*$.*

Démonstration. Cet énoncé est une variante du résultat de Maruyama, qui limitait son étude aux fibrés vectoriels sur $\mathbf{P}_2^*$. Si F est un faisceau semi-stable de multiplicité r et caractéristique d'Euler-Poincaré 0 qui n'a pas de section non nulle, on a $h^0(F(j)) = 0$ pour $j \leq 0$, et on détermine les $h^1(F(j))$ en utilisant la formule de Riemann-Roch. De la suite spectrale de Beilinson, il découle qu'un tel faisceau semi-stable a une présentation comme conoyau d'un morphisme

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-2)^r \xrightarrow{u} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-1)^r \rightarrow F \rightarrow 0.$$

Ceci conduit alors à une suite exacte sur $\mathbf{P}_2^*$

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1)^r \xrightarrow{u^*} \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}^r \otimes \mathcal{Q}_{\mathbf{P}_2^*} \rightarrow F' \rightarrow 0.$$

Le calcul de u^* à partir de u est clair : il s'agit d'observer que l'on a une identification canonique $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1)) \simeq H^0(\mathcal{Q}_{\mathbf{P}_2^*})$. Il en résulte que les droites de saut de F' sont celles qui correspondent aux points $x \in \mathbf{P}_2$ tels que $\det u(x) \neq 0$. Ainsi, la courbe de droite de saut de F' (et de faisceaux S — équivalents à F') est exactement le support schématique de F . Ceci implique que pour une droite générique l de $\mathbf{P}_2^*$ on a $F'|_l = \mathcal{O}_l$. On savait déjà par le lemme 4.1 que F' est sans torsion ; il en résulte que F' est μ -semi-stable. Mais dans ce cas particulier, les notions de semi-stabilité et μ -semi-stabilité coïncident : par suite F' est semi-stable.

Réciproquement, un faisceau semi-stable F' de rang r et classes de Chern $(0, r)$ sur le plan projectif dual a une présentation du type (2), et s'il existe une droite sur laquelle il est trivial, le faisceau $F' = R^1 p_*(q^*(F'(-1)))(-1)$ est un faisceau de dimension 1 sur le plan projectif, de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré 0. Il n'a pas de section : il en résulte qu'il est semi-stable. Les deux constructions sont évidemment inverses l'une de l'autre : en effet, un tel faisceau F' est toujours le conoyau d'un morphisme u^* comme ci-dessus, et l'inverse de Φ se construit en considérant le faisceau conoyau du morphisme u correspondant. Ceci entraîne l'énoncé. $\square$

COROLLAIRE 4.3. Si $r = 1$ ou 2, le morphisme Φ est un isomorphisme

$$\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, 0) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(r; 0, r)$$

En effet, dans ce cas, on a $H^0(F) = 0$ pour tout faisceau semi-stable F de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$.

4.2. Le cas cubique

THÉORÈME 4.4.

(1) Soit F un faisceau semi-stable de dimension 1 de multiplicité $r = 3$ et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$. Alors $F' = q_*(p^*(F(2)))(-1)$ est un faisceau semi-stable de rang 3, de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 3$.

(2) L'application $F \mapsto F'$ induit un morphisme de variété

$$\Phi : \mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(3, 0) \rightarrow \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3; 0, 3)$$

qui est l'éclatement du point a représentant le fibré vectoriel homogène $Q_1 = S^2 \mathcal{Q}_{\mathbf{P}_2^*}(-1)$.

Le fibré Q_1 est aussi le fibré des endomorphismes de Q de trace nulle ; c'est un faisceau stable, et par conséquent l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3; 0, 3)$ est lisse au voisinage de a . En dehors de a , il existe pour tout faisceau semi-stable F' de rang 3, et classes de Chern $(0, 3)$ une droite de $\mathbf{P}_2^*$ sur laquelle F' est trivial : en vertu du lemme 4.2 l'inverse de Φ , défini seulement en dehors de a associe à la classe du faisceau F' le point défini par le faisceau $F = R^1p_*(q^*(F'(-1)))(-1)$, dont le support schématique est la courbe des droites de saut de F' .

Démonstration. Si F n'a pas de section non nulle, l'énoncé résulte du lemme 4.2. Si F a une section non nulle, cette section définit un morphisme non nul $\mathcal{O}_C \rightarrow F$ où C est la cubique support schématique de F . Le faisceau $\mathcal{O}_C$ étant stable (cf. C. Sorger [21]), ce morphisme est évidemment un isomorphisme, et on a alors une présentation $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-3) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2} \rightarrow F \rightarrow 0$, ce qui montre que $q_*(p^*(F(2))) = S^2 Q_{\mathbf{P}_2^*}$, fibré vectoriel dont il est bien connu qu'il est semi-stable. Ceci démontre l'assertion (1).

Pour l'assertion (2), on peut remarquer que la construction de F' à partir de F peut se faire à partir de familles plates, paramétrées par une variété intègre : la famille de faisceaux F' obtenue, dont le rang est r et les classes de Chern $(0, r)$ est encore plate. La propriété de module grossier définit alors Φ . Les deux variétés projectives $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(3, 0)$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3; 0, 3)$ sont irréductibles de dimension 10 ; le morphisme Φ est surjectif et contracte le diviseur Θ en un point a . De plus, comme on l'a déjà vu, on obtient que Φ induit un isomorphisme de l'ouvert de $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(3, 0)$ complémentaire du diviseur Θ sur l'ouvert de $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3; 0, 3)$ correspondant aux faisceaux polystables F' pour lesquels il existe une droite l sur laquelle F' est trivial : cet ouvert est obligatoirement le complémentaire du point a . Plus précisément :

LEMME 4.5. *L'image réciproque du point a défini par le fibré Q_1 est une hypersurface lisse.*

Démonstration. D'après ce qu'on vient de voir, le fermé $\Phi^{-1}(a)$ est évidemment porté par le diviseur Θ . C'est donc la réunion schématique d'une hypersurface, et éventuellement de sous-variétés plongées dans cette hypersurface ; puisque $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(3, 0)$ est localement factorielle, cette hypersurface est donnée localement par une équation $f = 0$. En fait, les points du diviseur Θ représentent les faisceaux $\mathcal{O}_C$, où C est une cubique : on a déjà vu que ces faisceaux sont stables, et donc $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(3, 0)$ est lisse au voisinage du diviseur Θ . Pour voir que l'hypersurface $\Phi^{-1}(a)$ est lisse, il suffit de vérifier que l'application linéaire tangente $T\Phi$ est de rang 1 le long du diviseur Θ . Soit (z_1, z_2, z_3) une base de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1))$. Posons $A = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-2)^3$ et $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-1)^3$. Le faisceau homogène Q_1 est isomorphe au conoyau d'un morphisme u^* correspondant au morphisme $u : A \rightarrow B$ sur $\mathbf{P}_2$ défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_3 & z_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont l'image est isomorphe au fibré cotangent à $\mathbf{P}_2$. L'espace vectoriel tangent à $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3, 0, 3)$ au point a est isomorphe au conoyau de l'application linéaire

$$\mathrm{End}(A) \oplus \mathrm{End}(B) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, B)$$

définie par $(\alpha, \beta) \mapsto \beta u - u\alpha$. On considère, pour $v \in \mathrm{Hom}(A, B)$ la famille de morphismes $u_t = u + tv : A \rightarrow B$.

LEMME 4.6. *L'application linéaire*

$$v \mapsto \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \det(u_t)$$

induit un isomorphisme $T_a \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3; 0, 3) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(3))$

Démonstration. Constatons d'abord que cette application linéaire, notée aussi $v \mapsto \det'(u; v)$ au § 2.2, s'annule sur l'image de $\mathrm{End}(A) \oplus \mathrm{End}(B)$ et donc se factorise à travers l'espace tangent $T_a \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3; 0, 3)$. Les mineurs d'ordre 2 de u sont les produits $z_i z_j$ et par suite elle est surjective. Puisque ces deux espaces vectoriels ont même dimension, c'est un isomorphisme. $\square$

Terminons maintenant la démonstration du lemme 4.5. Soit C une cubique d'équation $w = 0$, avec $w \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(3))$ non nul. A cette équation correspond un vecteur tangent non nul, qui provient d'un morphisme v . A la famille de morphismes u_t est associée pour $t \neq 0$ et voisin de 0 une famille de faisceaux F_t de dimension 1 définie par

$$F_t = \mathrm{coker} \, u_t.$$

Ces faisceaux n'ont pas de section non nulle, et sont de multiplicité 3, et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$. Par suite ils sont semi-stables. Le point $F_0 = \lim_{t \rightarrow 0} F_t$ a alors un sens dans l'espace de module $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(3, 0)$; il a pour support schématique la cubique C , et son image par Φ dans l'espace de modules $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3; 0, 3)$ est le point a défini par le fibré $Q_1 = \mathrm{coker} \, u^*$. Par suite, $F_0 \simeq \mathcal{O}_C$. De plus, la dérivée en $t = 0$ de $t \mapsto \Phi(F_t)$ est exactement l'image de v dans l'espace tangent. Ceci achève la démonstration du lemme 4.5. $\square$

Fin de la démonstration du théorème 4.4. Par la propriété universelle des éclatements (cf. Hartshorne [6]) on obtient un morphisme birationnel de variétés projectives irréductibles et localement factorielles

$$\Phi^\vee : \mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}(3, 0) \rightarrow \mathrm{Bl}_a \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(3; 0, 3).$$

où le second membre est l'éclaté du point a . On a vu que le groupe de Picard du premier membre est abélien libre de rang 2; d'après le résultat de Drézet [2] il en est de même du second membre. Il en résulte que le morphisme $\Phi^\vee$ est un isomorphisme (cf. [18], théorème 2 du chapitre II). $\square$

Remarque 4.7. Cet énoncé entraîne en particulier que le fibré déterminant $\mathcal{D}$ n'est pas ample, puisque sa restriction au diviseur exceptionnel,

isomorphe à $\mathbf{P}_9$, est le fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_9}(-1)$. Il est cependant relativement ample au-dessus de l'espace projectif des cubiques.

4.3. Le cas quartique

THÉOREME 4.8₂

(1) Soit F un faisceau semi-stable de dimension 1, de multiplicité 4 et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$. Alors le faisceau $F' = q_*(p^*(F(2)))(-1)$ est un faisceau semi-stable de rang 4, de classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = 4$.

(2) L'application $F \rightarrow F'$ induit un morphisme

$$\Phi : N_{\mathbf{P}_1}(4, 0) \rightarrow M_{\mathbf{P}_2^*}(4; 0, 4)$$

qui est l'éclatement de la sous-variété, isomorphe au plan projectif, donnée par les classes des faisceaux $F'_x = S^2 Q_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \otimes I_x$ où x est un point de $\mathbf{P}_2^*$, et I_x l'idéal défini par le point x .

LEMME 4.9. Soit F est faisceau semi-stable de multiplicité r et de pente $\mu < \frac{1}{2}(3-r)$ sur $\mathbf{P}_2$. Alors $h^0(F) = 0$.

Démonstration. Si $h^0(F) \neq 0$, une section non nulle définit un morphisme $f: \mathcal{O}_C \rightarrow F$ non nul; on sait [21] que le faisceau structural $\mathcal{O}_C$ est stable. Par suite, on a $\mu(\mathcal{O}_C) \leq \mu$; par ailleurs, la formule de genre s'écrit $\mu(\mathcal{O}_C) = \frac{1}{2}(3-r)$, ce qui conduit à l'énoncé. $\square$

LEMME 4.10. Soit F un faisceau stable de multiplicité 4 et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$ sur $\mathbf{P}_2$. Si $h^0(F) \neq 0$, il existe une quartique C et une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow F \rightarrow T \rightarrow 0$$

où T est un module cohérent isomorphe au faisceau structural d'un sous-schéma fini de longueur 2 contenu dans C . De plus, la droite qui contient le support schématique de T n'est pas contenue dans C .

Le support schématique est défini par l'idéal de Fitting; pour le faisceau T qui figure dans l'énoncé, c'est la même chose que l'annulateur.

Démonstration. Une section non nulle de F définit un morphisme non nul $f: \mathcal{O}_C \rightarrow F$. Si l'image I de f était de multiplicité < 4 , on aurait, en utilisant le résultat de Sorger

$$-\frac{1}{2} < \mu_{\min}(I) < 0$$

Par suite, le faisceau $\mathcal{O}_C$ aurait un quotient semi-stable J de pente $-\frac{1}{3}$, donc de multiplicité 3 et caractéristique d'Euler-Poincaré -1 . Mais alors le noyau N du morphisme $\mathcal{O}_C \rightarrow J$ serait de multiplicité 1 et caracté-

ristique d'Euler-Poincaré $\chi = -1$. Les faisceaux N et J n'ayant pas de section non nulle d'après le lemme 4.9, il devrait en être de même de $\mathcal{O}_C$, ce qui est absurde. Par suite I est de multiplicité 4 et puisque F est de Cohen-Macaulay, le morphisme f est injectif. Le conoyau T de f est alors à support fini et $\chi(T) = 2$. De plus, F et par suite T est annulé par l'équation de C : ainsi, T est un $\mathcal{O}_C$ -module.

Pour voir que T est isomorphe au faisceau structural d'un sous-schéma de longueur 2, il suffit de vérifier la même chose pour le dual $T^\vee = \text{Ext}^2(T, \omega_{P_1})$. Remarquons d'abord que l'on a une involution $F \mapsto F^\vee := \text{Ext}^1(F, \omega_{P_1})$ qui respecte la notion de stabilité (cf. [21]); de plus $\text{Ext}^2(F, \omega_{P_1}) = 0$ et par dualité, on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow F^\vee \hookrightarrow \mathcal{O}_C(1) \rightarrow T^\vee \rightarrow 0,$$

d'où découle le résultat. Vérifions que la droite l qui contient le support schématique de T n'est pas contenue dans C . Si l était contenue dans C on aurait, en désignant par C' la cubique résiduelle, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & F^\vee & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{O}_{C'} & \rightarrow & \mathcal{O}_C(1) & \rightarrow & \mathcal{O}_l(1) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & T^\vee & = & T^\vee & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Il en résulte que le faisceau $\mathcal{O}_{C'}$ serait un sous-faisceau de $F^\vee$, ce qui contredit la stabilité.

Démonstration du théorème 4.8. En vertu du lemme 4.2. on peut, pour vérifier l'assertion (1) se limiter à l'étude des faisceaux F de multiplicité 4 et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$ qui ont une section non nulle. Si F n'est pas stable, il est extension de faisceaux G de multiplicité < 4 et de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle: d'après le lemme 4.1, ils satisfont à la condition $R^1 q_*(p^*(G(2))) = 0$ et $q_*(p^*(G(2)))$ est semi-stable. Il en résulte que $F' = q_*(p^*(F(2))(-1))$ est extension de faisceaux semi-stables de classe de Chern $c_1 = 0$ et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$, et par suite, il est encore semi-stable. On est donc ramené au cas où F est stable. D'après le lemme 4.10, un tel faisceau est extension

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow F \rightarrow T \rightarrow 0$$

où C est une quartique et T un $\mathcal{O}_C$ -module cohérent de support fini et longueur 2. On en déduit que l'on a un plongement

$$S^2 Q_{P_2} = q_*(p^*(\mathcal{O}_{P_1}(2))) \hookrightarrow q_*(p^*(\mathcal{O}_C(2))) \hookrightarrow q_*(p^*(F(2)))$$

Nous allons montrer que le conoyau $\mathcal{K}$ du morphisme composé est un faisceau de rang 1 sans torsion sur $\mathbf{P}_2^*$, bien sûr de classe de Chern $c_1 = 1$ et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 2$. On verra (cf. lemme 4.13) que ce faisceau est en fait isomorphe à $I_l(1)$, où I_l est l'idéal du point $l \in \mathbf{P}_2^*$ correspondant à la droite contenant le support schématisé de T . On a alors une extension $0 \rightarrow Q_1 \rightarrow F' \rightarrow \mathcal{K}(-1) \rightarrow 0$ d'où il résulte que F' est semi-stable.

L'involution $F \mapsto F^\vee := \text{Ext}^1(F, \omega_{\mathbf{P}_2})$ respecte la notion de semi-stabilité et le support schématisé; de la suite exacte (3) appliquée à $F^\vee$ il découle par dualité un plongement $F \hookrightarrow \mathcal{O}_C(1)$ et par suite une inclusion

$$q_*(p^*(F(2))) \hookrightarrow q_*(p^*(\mathcal{O}_C(3))) = S^3 Q_{\mathbf{P}_2^*}$$

Pour vérifier notre assertion, il suffit de vérifier que le conoyau $\mathcal{Q}$ du morphisme composé $S^2 Q_{\mathbf{P}_2^*} \rightarrow S^3 Q_{\mathbf{P}_2^*}$ est sans torsion. Ce morphisme est obtenu par multiplication par la section de $t \in H^0(Q_{\mathbf{P}_2^*}) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1))$ correspondant au morphisme composé $\mathcal{O}_C \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathcal{O}_C(1)$: c'est l'équation de la droite l qui contient le support schématisé de T . Le conoyau $\mathcal{Q}$ est alors isomorphe à $q_*(p^*(\mathcal{O}_l)(3))$. Le fait qu'il soit sans torsion est donc un cas particulier de l'énoncé suivant:

LEMME 4.11. *Pour $k \geq 0$, le faisceau $\mathcal{Q}_k = q_*(p^*(\mathcal{O}_l)(k))$ est isomorphe à $I_l^k(k)$, où I_l est l'idéal du point l de $\mathbf{P}_2^*$.*

Démonstration. On a une résolution

$$0 \rightarrow S^{k-1} Q_{\mathbf{P}_2^*} \xrightarrow{v} S^k Q_{\mathbf{P}_2^*} \rightarrow \mathcal{Q}_k \rightarrow 0$$

où le morphisme v induit par la multiplication par $t \in V^* = H^0(Q_{\mathbf{P}_2^*})$.

Supposons choisies des coordonnées (x, y, t) dans $V^* = H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(1))$ de sorte que l'équation de l soit $t = 0$; au voisinage du point $l \in \mathbf{P}_2^*$, un point de coordonnées (ξ, η) , correspond à la droite de $\mathbf{P}_2^*$ d'équation $t = \xi x + \eta y$. On a une trivialisé du fibré $Q_{\mathbf{P}_2^*}$ au voisinage de l donnée par les sections (x, y) , d'où on déduit une trivialisé de $S^k Q_{\mathbf{P}_2^*}$, donnée par les sections $(x^k, x^{k-1}y, \dots, y^k)$; on en déduit que le morphisme v est donné par la matrice

$$v = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \eta & \xi & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta & \xi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \eta \end{pmatrix}$$

de sorte que au voisinage du point l le conoyau est isomorphe à l'idéal engendré par les fonctions $\xi^i \eta^{k-i}$ c'est-à-dire l'idéal I_l^k . Par suite $\mathcal{Q}_k = I_l^k(k)$. Ceci démontre le lemme. $\square$

Pour trouver l'image du point défini par F par le morphisme Φ nous avons besoin d'identifier le faisceau $\mathcal{X}$ introduit dans la démonstration ci-dessus. Commençons par décrire, sur le plan projectif dual $\mathbf{P}_2^*$, le module cohérent $T'_1 = q_*(p^*(T))$.

LEMME 4.12.

a) Le faisceau T' est un faisceau de dimension 1, semi-stable, de multiplicité 2 et dont la caractéristique d'Euler-Poincaré est 2.

b) Le support schématique de T' est une conique C' singulière au point $l \in \mathbf{P}_2^*$ correspondant à la droite du plan $\mathbf{P}_2$ contenant le support schématique de T .

c) On a un isomorphisme

$$T' \simeq I_l \mathcal{O}_{C'}(1)$$

où I_l est l'idéal du point l .

Démonstration. On utilise la présentation, dans $\mathbf{P}_2$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_l(-1) \rightarrow \mathcal{O}_l(1) \rightarrow T \rightarrow 0$$

qui fournit par application du foncteur $q_*(p^*(-))$ la suite exacte (cf. lemme 4.11)

$$(4) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \xrightarrow{\gamma} I_l(1) \rightarrow T' \rightarrow 0.$$

Il en résulte que le module cohérent T' est de dimension 1, de Cohen-Macaulay, de multiplicité 2 et caractéristique d'Euler-Poincaré 2. Son support schématique est la conique définie en dehors de l par le morphisme γ . On a évidemment une suite exacte $0 \rightarrow T_1 \rightarrow T \rightarrow T_2 \rightarrow 0$ où T_i sont des faisceaux de longueur 1, de support des points a_i de $\mathbf{P}_2$ (éventuellement confondus). Par image directe, on obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{a_1} \rightarrow T' \rightarrow \mathcal{O}_{a_2} \rightarrow 0$$

où les faisceaux $\mathcal{O}_{a_i}$ sont les faisceaux structuraux des droites de $\mathbf{P}_2^*$ correspondant à a_i . Ceci prouve que T' est semi-stable. Dans $\mathbf{P}_2^*$, chacune des deux droites a_i contient le point l et est contenue dans C' ; il en résulte que l appartient à la conique C' et que c'est un point singulier de C' . L'assertion c) résulte trivialement de la suite exacte (4). $\square$

LEMME 4.13. Le faisceau $\mathcal{X}$ considéré ci-dessus est isomorphe à $I_l(1)$.

Démonstration. D'après la construction de $\mathcal{X}$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(-1) \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow T' \rightarrow 0,$$

et le faisceau $\mathcal{X}$ est un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$. Le morphisme composé $\mathcal{O}_*(-1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2^*}(1)$ est celui qui donne l'équation de la conique

singulière C' support schématique de T' . Il en résulte que la dimension de la fibre $\mathcal{X}(l)$ de $\mathcal{X}$ au point l est égale à la dimension de la fibre de T' en ce point. Cette dimension est 2 d'après la description de T' donnée dans le lemme 4.12. Donc l est un point singulier de $\mathcal{X}$; puisque $c_2(\mathcal{X}) = 1$ c'est le seul point singulier, et par suite $\mathcal{X} \simeq I_l(1)$. Ceci achève la démonstration du lemme 4.13. $\square$

Le diviseur Θ de $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}(0, 4)$

LEMME 4.14. *Le diviseur Θ est irréductible.*

Démonstration. C'est l'image de la variété $\mathcal{C}$ des couples (C, D) où C est une quartique de $\mathbf{P}_2$ et D un sous-schéma de longueur 2 de C , par le morphisme $\psi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}(0, 4)$ qui associe à (C, D) le point de $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}(4, 0)$ défini par le noyau F du morphisme surjectif $\mathcal{O}_C(1) \rightarrow T$, avec $T = \mathcal{O}_D(1)$.

En effet, constatons d'abord que ce noyau est toujours semi-stable, ce qui donne un sens au morphisme ψ : en effet, s'il n'était pas semi-stable, il aurait un sous-faisceau maximal F_1 de pente $0 < \mu_1 < \frac{1}{2}$. Ainsi, F_1 serait de multiplicité 3 et caractéristique $\chi = 1$. Le quotient $F_2 = F/F_1$ serait forcément isomorphe à $\mathcal{O}_l(-2)$, où l est une droite. Alors on aurait un morphisme d'extensions

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & F & \rightarrow & \mathcal{O}_C(1) & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & F_2 & \rightarrow & G & \rightarrow & T \rightarrow 0 \end{array}$$

où le faisceau G est un quotient de $\mathcal{O}_C(1)$ de multiplicité 1 et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 1$. Il est obligatoirement de Cohen-Macaulay, donc isomorphe à $\mathcal{O}_l$. Mais c'est absurde, car $\text{Hom}(\mathcal{O}_C(1), \mathcal{O}_l) = 0$.

Il est clair que tout point du diviseur Θ est l'image par ψ d'une paire (C, D) : ceci résulte du lemme 4.10 si c'est un point stable; s'il n'est pas stable, c'est la classe d'un faisceau $\mathcal{O}_{C'} \oplus \mathcal{O}_l(-1)$, avec C' cubique et l droite de $\mathbf{P}_2$. Mais alors on choisit $C = C' \cup l$ et $D \subset l$ de manière arbitraire. Ceci démontre le lemme.

COROLLAIRE 4.15 *La fibre $\Theta_1 := \Phi^{-1}(l)$ est irréductible de dimension 14.*

Démonstration. Le groupe projectif $\text{PGL}(3)$ opère de manière naturelle sur les espaces de modules $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}(4, 0)$ et $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(4; 0, 4)$, et le morphisme Φ est équivariant. Le plan $\mathbf{P}_2^*$ est invariant, et ce groupe opère de façon homogène sur ce plan. L'espace total étant irréductible de dimension 16, les fibres sont irréductibles de même dimension 14. Le morphisme Φ étant un morphisme birationnel entre variétés projectives normales, l'irréductibilité de Θ_1 résulte d'ailleurs aussi du « Main theorem » de Zariski. $\square$

Le cône normal de $\mathbf{P}_2^$ dans $\mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(4; 0, 4)$.* Donnons d'abord une description analytique locale de $\mathbf{M} := \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(4; 0, 4)$ au voisinage d'un point a_i de $\mathbf{P}_2^*$. Un tel point est représenté par le faisceau semi-stable $F' = Q_1 \oplus \mathcal{O}_l$. Le groupe des automorphismes de F' , isomorphe à $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, opère de manière naturelle sur l'espace vectoriel $\text{Ext}^1(F', F')$, et du point de vue analytique, on a un isomorphisme local

$$(\mathbf{M}, a_i) \simeq (\text{Ext}^1(F', F')/\text{Aut}(F'), 0)$$

où le quotient qui figure dans le second membre est le quotient de Mumford. L'espace vectoriel $\text{Ext}^1(F', F')$ se décompose en somme directe de 4 facteurs que nous écrivons sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \text{Ext}^1(Q_1, Q_1) & \text{Ext}^1(I_l, Q_1) \\ \text{Ext}^1(Q_1, I_l) & \text{Ext}^1(I_l, I_l) \end{pmatrix}$$

Le groupe $\text{Aut}(F')$ agit trivialement sur le premier et quatrième facteur; pour $(\lambda, \mu) \in \text{Aut}(F')$, il agit par multiplication par $\frac{\mu}{\lambda}$ sur le facteur

$\text{Ext}^1(I_l, Q_1)$ et par multiplication par $\frac{\lambda}{\mu}$ sur le facteur $\text{Ext}^1(Q_1, I_l)$. Ce quotient est donc isomorphe à $\text{Ext}^1(Q_1, Q_1) \times \text{Ext}^1(I_l, I_l) \times R$ où R désigne la sous-variété de $\text{Ext}^1(I_l, Q_1) \otimes \text{Ext}^1(Q_1, I_l)$ des tenseurs décomposables.

Il en résulte que le cône normal N_l de $\mathbf{P}_2^*$ dans $\mathbf{M}$ est isomorphe au produit $\text{Ext}^1(Q_1, Q_1) \times R$.

Fin de la démonstration du théorème 4.8. Elle s'inspire de celle du théorème 4.4; cependant elle est plus délicate en raison du fait que le plan $\mathbf{P}_2^*$ de $\mathbf{M}$ est contenu dans le lieu singulier. On a vu que le diviseur Θ est contracté en le plan projectif $\mathbf{P}_2^*$, et compte-tenu du lemme 4.2, on obtient que l'image réciproque de $\mathbf{P}_2^*$ par Φ est, au moins ensemble, le diviseur Θ . Cette image réciproque est donc encore la réunion d'une hypersurface, donnée localement par une équation puisque $N_{\mathbf{P}_2}(4, 0)$ est localement factorielle, et éventuellement de sous-variétés immergées. Pour voir que $\Phi^{-1}(\mathbf{P}_2^*)$ est une hypersurface, il suffit de montrer que l'application linéaire tangente $T\Phi$, évidemment de rang ≥ 2 en tout point de Θ d'après la description donnée dans la démonstration du lemme 4.14, est en fait de rang 3. On se place au-dessus du point a_i correspondant au faisceau polystable $F' = Q_1 \oplus I_l$. On peut supposer que l est la droite d'équation $z_1 = 0$. Posons $A = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^4(-2)$ et $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^4(-1)$. Le faisceau F' a une présentation du type (2), à laquelle correspond un morphisme $u: A \rightarrow B$ sur $\mathbf{P}_2$ donné par la matrice

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -z_3 & z_2 & 0 \\ z_3 & 0 & -z_1 & 0 \\ -z_2 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}$$

Considérons un élément $v = (r, s_1 \otimes s_2)$ du cône normal N_l de $\mathbf{P}_2^*$ dans $\mathbf{M}$. Un tel élément se représente par l'élément de $\text{Ext}^1(F', F')$ de matrice

$$\begin{pmatrix} r & s_1 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'espace vectoriel $\text{Ext}^1(F', F')$ peut se représenter par un sous-espace vectoriel de $\text{Hom}(A, B)$ transverse à l'orbite du point u sous le groupe $\text{Aut}(A) \times \text{Aut}(B)$; dans les sommes directes $A = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^3(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-2)$ et $B = \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}^3(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(-1)$ on obtient un représentant v dont la matrice sera encore notée

$$v = \begin{pmatrix} r & s_1 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici les matrices r, s_1 et s_2 sont à coefficients dans $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$. Considérons, pour $t \in \mathbb{C}$ le morphisme $u_t : A \rightarrow B$ de matrice

$$u_t = \begin{pmatrix} u_{11} + tr & s_1 \\ ts_2 & z_1 \end{pmatrix}$$

où $u_{11} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^3(-2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^3(-1)$ est donné par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -z_3 & z_2 \\ z_3 & 0 & -z_1 \\ -z_2 & z_1 & 0 \end{pmatrix}$$

LEMME 4.16.

(i) Le polynôme $w \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4))$ défini par

$$w = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \det(u_t)$$

ne dépend que de v .

(ii) L'application $v \mapsto w : N_1 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4))$ est surjective, et induite par une application linéaire dont le noyau ne rencontre N_1 qu'au point $\{0\}$.

Démonstration. Écrivons

$$s_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b \\ c_1 \end{pmatrix}; \quad s_2 = (a_2 \ b_2 \ c_2)$$

Le calcul montre que

$$w = z_1 \det'(u_{11}; r) - (a_1 z_1 + b_1 z_2 + c_1 z_3)(a_2 z_1 + b_2 z_2 + c_2 z_3)$$

On voit donc que ce polynôme ne dépend que de $v = (r, s_1 \otimes s_2)$ et que l'application $v \mapsto w$ est induite par une application linéaire. D'après le lemme 4.6 tout polynôme de degré 3 est de la forme $\det'(u_{11}; r)$; il en résulte que tout polynôme de degré 4 est de la forme ci-dessus. Si ce polynôme est nul, alors z_1 divise soit s_1 soit s_2 . Mais ceci signifie que la classe de s_1 (ou la classe de s_2) dans $\text{Ext}^1(I_i, Q_1)$ (resp. $\text{Ext}^1(Q_1, I_i)$) est nulle. Mais par le choix de notre représentant v ceci implique que $s_1 = 0$ ou $s_2 = 0$. Alors $\det'(u_{11}; r) = 0$; d'après le lemme 4.6, ceci entraîne $r = 0$ et par suite $v = 0$. Ceci démontre le lemme 4.16. $\square$

On suppose maintenant $v \neq 0$. Alors, pour t voisin de 0 et non nul le morphisme $u_t : A \rightarrow B$ construit ci-dessus est génériquement de rang 4, et son conoyau $F_t = \text{coker } u_t$ est un faisceau de dimension 1, de multiplicité 4 et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$; il n'a pas de section non nulle, et par suite, il est semi-stable. Il définit donc un point dans l'espace de modules $N_{\mathbb{P}^2}(4, 0)$. Considérons le point

$$F_0 = \lim_{t \rightarrow 0} F_t$$

L'image $\Phi(F_0)$ est le point défini par le conoyau de la matrice u_0^* sur $\mathbf{P}_2^*$ associée à la matrice

$$u_0 = \begin{pmatrix} u_{11} & s_1 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix}$$

et par suite, le faisceau associé sur $\mathbf{P}_2^*$ est extension de I_t par $\mathcal{O}_t$. Par suite, $\Phi(F_0) = a_t$: ainsi, F_0 est un point du diviseur Θ . De plus, la dérivée au point $t = 0$ de l'arc $t \mapsto \Phi(F_t)$ est évidemment le vecteur $v \in N_t$ non nul par hypothèse. On a ainsi montré que l'application linéaire tangente $T\Phi$ est de rang 3 au point F_0 . Il reste à montrer que tout point du diviseur Θ est de la forme F_0 .

LEMME 4.17. *Le point F_0 ne dépend pas du représentant v choisi dans $\text{Ext}^1(F', F'')$, mais seulement de v , et l'application $N_t - \{0\} \rightarrow \Theta$ définie par $v \mapsto F_0$ est surjective.*

Démonstration. Considérons le morphisme canonique

$$\Theta_t \xrightarrow{\sigma} |\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(4)|$$

Ce morphisme est génériquement fini de degré 6. Le point F_0 dépend de manière régulière de

$$v = \begin{pmatrix} r & s_1 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix}$$

et pour l'action naturelle de $\text{Aut}(F')$ sur $\text{Ext}^1(F', F')$ le morphisme composé $v \mapsto w = \sigma(F_0)$ est invariant. Il en résulte que F_0 lui-même ne dépend pas de v , mais seulement de v . En fait, il ne dépend que de la classe de v dans la variété projective $\mathbf{P}(N_t)$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(N_t) & \rightarrow & \Theta_t \\ & \searrow & \downarrow \sigma \\ & & |\mathcal{O}_{\mathbf{P}_2}(4)| \end{array}$$

dans lequel le morphisme oblique est surjectif d'après le lemme 4.16. Ainsi, l'image de la flèche horizontale est un fermé de dimension 14. Puisque Θ_t est irréductible d'après le corollaire 4.15, cette flèche est surjective. Ceci achève la démonstration du lemme. $\square$

La démonstration se termine comme dans le cas $r = 3$: par la propriété universelle des éclatements (cf. Hartshorne [6]) on obtient un morphisme birationnel de variétés projectives irréductibles et localement factorielles

$$\Phi^\vee : \mathbf{N}_{\mathbf{P}_4}(4, 0) \rightarrow \text{Bl}_{\mathbf{P}_2^*} \mathbf{M}_{\mathbf{P}_2^*}(4; 0, 4)$$

où le second membre est l'éclaté du plan $\mathbf{P}_2^*$. On a vu que le groupe de Picard du premier membre est un groupe abélien libre de rang 2 ; d'après le résultat de Drézet [2], il en est de même du second membre. Le théorème 2 du chapitre II de [18] reste vrai pour les variétés localement factorielles : il en résulte que le morphisme $\Phi^\vee$ est un isomorphisme. $\square$

4.4. Faisceaux de multiplicité $r > 4$

Si F est un faisceau de dimension 1 et de multiplicité $r > 4$, de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$ le faisceau $F' = q_*(p^*(F(2)))(-1)$ est sans torsion de rang r et de classes de Chern $(0, r)$ d'après le lemme 4.1, mais il n'est pas obligatoirement stable :

PROPOSITION 4.18. *Pour tout entier $r > 4$ il existe un faisceau stable F de multiplicité r et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$ sur le plan projectif tel que $G = q_*(p^*(F(2)))$ soit instable.*

Démonstration. Supposons d'abord r impair, et considérons une courbe plane C de degré r . Posons $r = 2k + 3$ et considérons le faisceau $F = \mathcal{O}_C(k)$. D'après le résultat de C. Sorger [21], c'est évidemment un faisceau stable de caractéristique $\chi = 0$. De plus la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-(k+1)) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k+2) \rightarrow F(2) \rightarrow 0$$

conduit à la suite exacte

$$0 \rightarrow S^{k+2}Q_{\mathbb{P}^2}^* \rightarrow G \rightarrow S^{k+1}Q_{\mathbb{P}^2}^* \rightarrow 0$$

ce qui entraîne que le faisceau $G = q_*(p^*(F(2)))$ est localement libre de rang r , de pente $\mu = 1$ et que G a un quotient localement libre de pente $-\frac{k-1}{2} < 1$ donc n'est pas semi-stable.

Supposons maintenant que r soit pair ; posons $r = 2k + 4$. Considérons une courbe lisse C plane de degré r et $k+2$ points lisses distincts sur C . Soit J l'idéal de C défini par ces points et $F := Ext^1(J, \omega_{\mathbb{P}^2})(-(k+1))$. Puisque C est irréductible, F est un faisceau stable, de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 0$ et l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(k) \rightarrow F \rightarrow T^\vee \rightarrow 0.$$

Il en résulte que $G = q_*(p^*(F(2)))$ est un faisceau de rang r sans torsion de classe de Chern $c_1 = r$ donc de pente 1. Il contient comme sous-faisceau $S^{k+2}Q_{\mathbb{P}^2}^*$ qui est de pente $\frac{k}{2} + 1$ et par suite c'est un faisceau instable pour $r > 4$. $\square$

Soit F un faisceau semi-stable de dimension 1, de multiplicité r , de caractéristique d'Euler-Poincaré χ . On peut bien sûr songer à étudier si les images directes $G_i = q_*(p^*(F(i)))$ pour $i > 0$ entier convenable, sont encore semi-stables. On sait déjà d'après le lemme 4.1 que ces faisceaux sont sans torsion, de rang r , de classe de Chern $c_1 = (i-1)$ et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = ir$. On a par exemple :

PROPOSITION 4.19. *On considère, pour F générique, le faisceau $G_k = q_*(p^*(F(k)))$.*

(1) *Si $r = 2k - 1$, le faisceau G_k est stable.*

(2) *Si $r = 2k$ le faisceau G_k est semi-stable.*

Démonstration. Il suffit d'étudier les faisceaux construits dans la proposition 4.18. Si $r = 2k - 1$ l'image directe $G_k = q_*(p^*(F(k)))$ du faisceau $\mathcal{O}_C(k-2)$, où C est une courbe de degré r est isomorphe à $S^{r-1}Q_{\mathbb{P}^2}^*$ et par conséquent stable. Dans le cas $r = 2k$, on considère une courbe

lisse l'idéal $J \subset \mathcal{O}_C$ de k points lisses sur C alignés. Alors pour le faisceau $F = J(k-1)$ l'image directe $G_k = q_*(p^*(F(k)))$ est encore semistable : on a des inclusions

$$\mathcal{O}_C(k-2) \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathcal{O}_C(k-1),$$

où l'inclusion $\mathcal{O}_C(k-2) \hookrightarrow \mathcal{O}_C(k-1)$ est induite par l'équation de la droite contenant les points marqués sur C . La démonstration se termine exactement comme celle de l'assertion (1) du théorème 4.8. $\square$

On obtient alors, pour $i = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ une application rationnelle

$$\Phi_i : \mathbf{N}_{\mathbf{P}_2^*}(r, 0) \dashrightarrow \mathbf{M}_{r,i}$$

où $\mathbf{M}_{r,i}$ désigne l'espace de modules associé aux faisceaux semi-stables de rang r , classe de Chern $c_1 = (i-1)r$ et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = ir$ sur le plan projectif dual.

CONJECTURE 4.20. Pour $i = \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$ l'application rationnelle Φ_i s'étend à l'espace de modules global $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2^*}(r, 0)$.

L'espace de modules $\mathbf{M}_{r,i}$ est de dimension $(i^2 - i - 1)r^2 + 1$ donc supérieure à $r^2 + 1$ dès que $i > 2$. Cependant, l'application rationnelle Φ_i n'est pas un plongement, comme le montre la démonstration de la dernière proposition.

5. QUESTIONS DE RATIONALITÉ

On a déjà identifié pour $r = 1$ ou 2 les espaces de modules $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi)$: ils sont isomorphes pour $r = 1$ au plan projectif, et pour $r = 2$ à l'espace projectif des coniques. On se propose d'étudier la rationalité des espaces de modules $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi)$.

THÉORÈME 5.1. On suppose $r \geq 3$.

(1) Pour $r = 3$, les espaces de modules $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi)$ sont isomorphes à la cubique universelle dans le plan projectif si $\chi \equiv \pm 1 \pmod{3}$, et rationnels si $\chi \equiv 0 \pmod{3}$.

(2) Les espaces de modules $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi)$ sont rationnels si $\chi \equiv \pm 1 \pmod{r}$ et $\chi \equiv \pm 2 \pmod{r}$.

(3) L'espace de modules $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi)$ est rationnel si $r \leq 4$.

La courbe universelle $\mathcal{U}(r)$ de degré r dans $\mathbf{P}_2$ est évidemment rationnelle, puisque c'est un fibré localement trivial en espace projectifs au-dessus du plan projectif. La rationalité de $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, 0)$ pour $r = 3$ ou $r = 4$ résulte d'un énoncé de Formanek [5] : en effet, on a vu que $\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, 0)$ contient un ouvert isomorphe à l'ouvert des fibrés de Higgs stables quasi-rigides (cf. § 3) sur $(\mathbf{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(1))$. Cet ouvert est isomorphe au quotient de Mumford $\text{Hom}^s(G, G(1))/\text{Aut}(G)$ où G désigne le fibré trivial de rang r sur $\mathbf{P}_1$. L'espace vectoriel des morphismes $\text{Hom}(G, G(1))$ est aussi l'espace vectoriel des paires de matrices carrées d'ordre r et le groupe $\text{Aut}(G) \simeq$

$\simeq \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ agit sur cet espace par conjugaison sur chacun des facteurs. Le résultat de Formanek affirme que ce quotient est rationnel. Il reste à vérifier les assertions (1) et (2).

Démonstration. On a un isomorphisme

$$\mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi) \simeq \mathbf{N}_{\mathbf{P}_2}(r, \chi + ir).$$

En utilisant en outre la dualité, on est ramené à étudier les cas $\chi = 1$ et $\chi = 2$.

1. *Le cas $r = 3$, $\chi = 1$.* Si F est un faisceau stable de dimension 1, multiplicité r , et caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 1$; en vertu du lemme 3.12 le spectre (avec multiplicités) du fibré de Higgs associé sur $(\mathbf{P}_1, \mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(1))$ est $(0, (-1)^2)$. Il en résulte que $h^0(F) = 1$. On a alors un morphisme $\mathcal{O}_C \xrightarrow{j} F$, où C est la cubique support schématique de F . Puisque $\mathcal{O}_C$ et F sont stables, ce morphisme est obligatoirement injectif. Le conoyau de j est alors isomorphe au faisceau structural d'un point p placé sur la courbe C . Réciproquement, étant donné une paire (C, p) formée d'une cubique C et d'un point p placé sur C on définit le faisceau $F^\vee$ par le noyau du morphisme canonique $\mathcal{O}_C \rightarrow \mathbb{C}_p$. Ce faisceau est de multiplicité 3 et caractéristique $\chi = -1$. Il est stable : car si F' est un sous-faisceau de $F^\vee$ de multiplicité $r' < 3$, sa pente μ' est < 0 et par suite $\mu' < -\frac{1}{2}$. Le faisceau F est alors stable de multiplicité 3 et $\chi = 1$. On a ainsi obtenu un isomorphisme

$$\mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}(3, 1) \simeq \mathcal{U}(3)$$

avec la cubique universelle de degré 3 dans le plan projectif, en associant à F la paire (C, p) .

2. *Le cas $r > 3$, $\chi = 1$.* La même démonstration que dans le cas $r = 3$ montre que sur l'ouvert correspondant aux fibrés de Higgs quasi-rigides on a $h^0(F) = 1$. Si C est la courbe de degré r définie par le support schématique de C on a alors un morphisme canonique (à homothétie près) $\mathcal{O}_C \rightarrow F$. En général (par exemple si C est irréductible) ce morphisme est injectif et son conoyau est isomorphe au faisceau structural d'un sous-schéma de C de longueur $g = \frac{r(r-3)}{2} + 1$.

Réciproquement, étant donné une paire (C, Y) formée d'une courbe de degré r et d'un sous-schéma de Y de longueur g on considère le faisceau défini par $F = \mathrm{Ext}^1(J_Y(r-3), \omega_{\mathbf{P}_1})$ où J_Y est l'idéal de Y dans C . Alors F est un faisceau de dimension 1, de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi = 1$. En général, (par exemple si la courbe C est irréductible) il est stable. On a donc obtenu une transformation birationnelle

$$\mathbf{N}_{\mathbf{P}_1}(r, 0) \dashrightarrow \mathrm{Div}^g(\mathcal{U}/\mathbf{P}_2)$$

sur la variété relative des diviseurs de Weil de degré g sur la courbe universelle de degré r . Localement, au-dessus d'un ouvert du schéma de Hil-

bert des sous-schémas finis de longueur g de $\mathbf{P}_2$ cette variété est un fibré en espaces projectifs de dimension $3r - 1$. Ce schéma de Hilbert étant une variété rationnelle, on obtient le résultat annoncé.

3. *Le cas $r > 3$, $\chi = 2$.* Le cas $\chi = 2$ est beaucoup plus difficile; pour $r > 4$, la démonstration s'appuie sur les résultats de Hulek [8], Strømme [22] et Maeda [14] qui donnent la rationalité des espaces de modules de fibrés vectoriels stables de rang 2 sur le plan projectif. Il est commode d'introduire pour la démonstration les variétés de modules des systèmes cohérents, construites dans [11], qui généralisent celles des systèmes linéaires.

Systèmes cohérents. On se place sur une variété algébrique projective X lisse, connexe de dimension n , polarisée, et on désigne par P_X le polynôme de Hilbert de $\mathcal{O}_X$. Si F est un faisceau algébrique cohérent de dimension d sur X , le polynôme de Hilbert P_F de F s'écrit

$$P_F(m) = r \frac{m^d}{d!} + \text{termes de degrés inférieurs.}$$

où r est un entier, appelé multiplicité de F . Si F est sans torsion, cet entier est le produit du rang de F par le degré de X . Le polynôme de Hilbert réduit de F est défini par

$$p_F = \frac{P_F}{r}.$$

Définition 5.2. On appelle système cohérent de dimension d sur la variété X une paire (Γ, F) , où F est un faisceau algébrique cohérent de dimension d sur X , et Γ un sous-espace vectoriel de $H^0(F)$.

Un système cohérent (Γ, F) de dimension n est appelé structure de niveau si l'espace vectoriel Γ a pour dimension la multiplicité de F .

Étant donné un système cohérent (Γ, F) de dimension d sur la variété X , le polynôme de Hilbert réduit de (Γ, F) est défini par

$$p_{(\Gamma, F)} = \frac{\dim \Gamma}{r} P_X + p_F.$$

où r est la multiplicité de F .

*Définition 5.3. Semi-stabilité*¹

Un système cohérent (Γ, F) de dimension d est dit semi-stable (resp. stable) si

- le faisceau F est pur de dimension d ;
- pour tout sous-module cohérent non nul $F' \subset F$, et tout sous-espace vectoriel $\Gamma' \subset H^0(F') \cap \Gamma$, on a

$$p_{(\Gamma', F')} \leq p_{(\Gamma, F)}$$

¹ Les polynômes sont ordonnés par ordre lexicographique sur les coefficients, en commençant par les termes de plus haut degré.

L'inégalité de l'assertion b) signifie que l'on a

$$\frac{\dim \Gamma'}{r'} \leq \frac{\dim \Gamma}{r} \quad \text{et, en cas d'égalité, } p_{F'} \leq p_F \text{ (resp. } < \text{)}$$

où r et r' sont les multiplicités respectives de F et F' .

Exemple. Si F est un faisceau algébrique cohérent sur X , le système cohérent $(\{0\}, F)$ est semi-stable si et seulement si le faisceau F est semi-stable. En général, si un système cohérent (Γ, F) est semi-stable, ceci n'implique pas que F est un faisceau semi-stable.

Un morphisme de systèmes cohérents $(\Gamma, F) \rightarrow (\Gamma', F')$ est un morphisme de faisceaux algébriques $f: F \rightarrow F'$ tel que $f(\Gamma) \subset \Gamma'$. Les systèmes cohérents de polynôme de Hilbert réduit fixé constituent une catégorie abélienne, dans laquelle la notion de filtration de Jordan-Hölder a un sens; à isomorphisme près, le gradué de Jordan-Hölder d'un système cohérent semi-stable est donc bien défini. Deux systèmes cohérents semi-stables sont dits S -équivalents si leurs gradués de Jordan-Hölder sont isomorphes.

THÉORÈME 5.4. Soit P un polynôme de degré d . Il existe pour les systèmes cohérents semi-stables (Γ, F) de dimension d sur X tels que $P_F = P$ un espace de modules grossier $\text{Syst}_X(P)$. Cette variété a les propriétés suivantes :

1. Elle est projective.
2. Les points fermés de $\text{Syst}_X(P)$ sont les classes de S -équivalence de systèmes cohérents semi-stables (Γ, F) tels que $P_F = P$.
3. L'ensemble des classes d'isomorphisme de systèmes cohérents stables (Γ, F) tels que $P_F = P$ s'identifie à un ouvert $\text{Syst}_X^*(P, i)$ de la variété $\text{Syst}_X(P)$.

Naturellement, on a une décomposition en composantes disjointes

$$\text{Syst}_X(P) = \coprod_i \text{Syst}_X(P, i)$$

où $\text{Syst}_X(P, i)$ est la composante correspondant aux systèmes cohérents (Γ, F) tels que $\dim \Gamma = i$.

On suppose désormais que X est une surface algébrique projective lisse, et que ω_X est numériquement équivalent à $\alpha \mathcal{O}_X(1)$, où α est un nombre rationnel. Etant donné deux entiers r et χ , on pose $P(m) = rm + \chi$. Etant donné un système cohérent semi-stable (Γ, F) , où F est de dimension 1, de multiplicité r et de caractéristique d'Euler-Poincaré, χ , et $\dim \Gamma = i$, on peut considérer le faisceau $G = \text{Ext}^1(F, \mathcal{O}_X)$: ce faisceau a alors pour polynôme de Hilbert $P^*(m) = rm - (\alpha r + \chi)$. Le faisceau F étant de Cohen-Macaulay, on a aussi $F \simeq \text{Ext}^1(G, \mathcal{O}_X)$ et par suite $H^0(F) \simeq \text{Ext}^1(G, \mathcal{O}_X)$, de sorte que l'on peut associer au système cohérent ci-dessus une classe canonique de $\text{Ext}^1(G, \Gamma^* \otimes \mathcal{O}_X)$. Ceci fournit une extension

$$0 \rightarrow \Gamma^* \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 0.$$

On a ainsi associé à (Γ, F) une structure de niveau (Γ^*, E) avec E de dimension 2, de polynôme de Hilbert $iP_X + P^*$. Le Théorème suivant est démontré dans [11].

THÉORÈME 5.5. *Le système cohérent (Γ^*, E) est semi-stable. Le morphisme fonctoriel $(\Gamma, F) \mapsto (\Gamma^*, E)$ induit un isomorphisme*

$$\text{Syst}_X(P, i) \simeq \text{Syst}_X(iP_X + P^*, i)$$

qui échange les ouverts de points stables $\text{Syst}_X^s(P, i)$ et $\text{Syst}_X^s(iP_X + P^, i)$.*

Retour au plan projectif. On suppose pour l'instant $0 < \chi \leq r$. Soit U l'ouvert de $\text{Syst}_{P_2}^s(P, \chi)$ correspondant aux classes de systèmes cohérents (Γ, F) tels que $h^0(F) = \chi$. Cet ouvert est évidemment non vide : il suffit de choisir sur une courbe lisse de degré r un faisceau inversible F tel que $h^0(F) = \chi$. Alors le système linéaire complet $(H^0(F), F)$ est stable et définit un point de U . Remarquons de plus que dans cet exemple, F est lui-même stable. On a alors un plongement ouvert $U' \hookrightarrow N_{P_2}(r, \chi)$, défini sur l'ouvert $U' \subset U$ des classes de systèmes cohérents stables (Γ, F) telles que F soit stable, ouvert lui aussi non vide d'après ce qu'on vient de voir, qui associe à la classe de (Γ, F) la classe de F . Ainsi, on a obtenu un isomorphisme birationnel

$$U \dashrightarrow N_{P_2}(r, \chi)$$

Soit P^* le polynôme défini par $P^*(m) = rm \times 3r - \chi$. À l'ouvert U correspond, dans l'espace de modules $\text{Syst}_{P_2}^s(\chi P_X + P^*, \chi)$, l'ouvert U^* des structures de niveau stables (Γ^*, E) où E est un faisceau sans torsion satisfaisant aux conditions suivantes :

$$r(E) = \chi, c_1(E) = r, \chi(E) = 3r; \quad h^0(E) = 3r.$$

Remarquons que le faisceau E n'est pas obligatoirement stable : le calcul montre en effet que l'on a $(2rc_2 - (r-1)c_1^2)(E) = (r-\chi)(r-2\chi)$ qui n'est positif que si $0 < 2\chi \leq r$.

Le cas $r = 4, \chi = 2$. Dans ce cas, l'ouvert U^* rencontre l'ouvert des systèmes cohérents stables (Γ^*, E) tel que E soit semi-stable : les classes de Chern imposent en fait qu'un tel faisceau doit être isomorphe à $(\mathcal{O}_{P_2}(2))^2$. Considérons en effet l'ouvert $\text{Grass}^s(2, H^0(\mathcal{O}_{P_2}(2)))$ des points stables de la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 2 sous l'action de $Gl(2, \mathbb{C})$, et le quotient de Mumford

$$\mathcal{B}^s = \text{Grass}^s(2, H^0(\mathcal{O}_{P_2}(2))) \otimes \mathbb{C}^2 / Gl(2, \mathbb{C}).$$

LEMME 5.6. *Soit $E = (\mathcal{O}_{P_2}(2))^2$. En dehors d'un fermé de codimension 10, un point $a \in \mathcal{B}^s$ définit une classe d'isomorphisme de systèmes cohérents stables (Γ^*, E) .*

Démonstration. Le fibré E étant semi-stable, pour vérifier que (Γ^*, E) est un système cohérent stable, il suffit de constater que si $E' \subset E$ est un sous-fibré de rang un on a $\dim \Gamma^* \cap H^0(E') \leq 1$, sauf pour les sous-fibrés E' de classe de Chern $c_1 = 2$, pour lesquels on doit vérifier l'inégalité stricte. Mais si $E' \simeq \mathcal{O}_{P_2}(2)$ cette inégalité stricte résulte de la définition des points stables de $\text{Grass}(2, H^0(\mathcal{O}_{P_2}(2))) \otimes \mathbb{C}^2$ sous l'action de $Gl(2, \mathbb{C})$ (cf. [17]; [12]). Le schéma de Hilbert des sous-fibrés $E' \subset E$ de rang 1 de classe de Chern $c_1 = 1$ est un variété quasi-projective de dimension 5;

un tel sous-fibré étant fixé, les points $\Gamma^* \in \text{Grass}(2, H^0(\mathcal{O}_{P_1}(2)) \otimes \mathbb{C}^2)$ contenus dans $H^0(E')$ forment un plan projectif; par suite les Γ^* qui ne satisfont pas à la condition demandée appartiennent à un fermé de dimension ≤ 7 dans $\text{Grass}(2, H^0(\mathcal{O}_{P_1}(2)) \otimes \mathbb{C}^2)$. Si $c_1(E') \leq 0$, la condition est toujours satisfaite. Par image dans $\mathfrak{B}^s$ on obtient le résultat. $\square$

On a ainsi obtenu un isomorphisme birationnel $\mathfrak{B}^s \dashrightarrow U^*$, et par suite un isomorphisme birationnel $\mathfrak{B}^s \dashrightarrow \mathbf{N}_{P_1}(4, 2)$. On est donc ramené à prouver que le quotient de Mumford $\mathfrak{B}^s$ est une variété rationnelle. Ceci résulte de l'énoncé plus général suivant :

LEMME 5.7. *Soit W un espace vectoriel de dimension ≥ 3 . On désigne par $\text{Grass}^{ss}(2, W \otimes \mathbb{C}^2)$ l'ouvert des points semi-stables dans la grassmannienne des sous-espaces de dimension 2 de $W \otimes \mathbb{C}^2$. Alors le quotient de Mumford*

$$\mathfrak{B}_W := \text{Grass}^{ss}(2, W \otimes \mathbb{C}^2) / \text{GL}(2, \mathbb{C})$$

est une variété rationnelle de dimension $4 \dim W - 7$.

Démonstration. Considérons l'espace projectif $P(W)$ des hyperplans de W , et désignons par A le fibré trivial de rang 2 sur $P(W)$; posons enfin $B = A(1)$. Soit $\mathcal{X}$ l'espace vectoriel des morphismes de Kronecker $u : A \rightarrow B$ sur l'espace projectif $P(W)$. Soit $\mathcal{X}^{ss}$ l'ouvert de $\mathcal{X}$ des modules de Kronecker semi-stables. Cet ouvert est invariant par l'action de $\text{Aut}(A) \times \text{Aut}(B)$ par conjugaison et on a un isomorphisme

$$\mathfrak{B}_W \simeq \mathcal{X}^{ss} / (\text{Aut}(A) \times \text{Aut}(B))$$

où le membre de droite désigne aussi le quotient de Mumford. Rappelons que ce quotient est un bon quotient.

Pour $\dim W = 3$, il est isomorphe au schéma de Hilbert des coniques de plan projectif : on associe à la classe de u la conique définie par $\det u$. Pour $\dim W = 4$, il est birationnel au schéma de Picard relatif des fibrés inversibles L sur les quadriques lisses, satisfaisant aux conditions numériques $\langle L, h \rangle = 4$ et $\chi(L) = 6$: en effet, si $\det u$ définit une quadrique lisse, on associe à u le conoyau de u , qui est un fibré inversible sur cette quadrique. Pour chaque quadrique lisse, il existe seulement deux tels fibrés, correspondant aux deux systèmes de droites sur la quadrique. Ce schéma de Picard relatif est un revêtement double non ramifié de l'ouvert de $P_9 := |\mathcal{O}_{P_3}(2)|$ des quadriques lisses, et il est bien connu que cette variété est une variété rationnelle.

Dans le cas $\dim W \geq 5$, tous les modules de Kronecker u d'une même orbite s'annulent sur un sous-espace projectif de codimension ≤ 4 . Un module de Kronecker qui s'annule sur un sous-espace projectif de codimension ≤ 3 sera dit dégénéré. Les modules de Kronecker dégénérés constituent un fermé de codimension $\dim W - 3$ dans $\mathcal{X}$. Ce fermé est invariant par $\text{Aut}(A) \times \text{Aut}(B)$; son image dans $\mathfrak{B}_W$ est un fermé dont le complémentaire est ouvert noté $\mathfrak{B}_{W,0}$. L'image réciproque de cet ouvert sera notée $\mathcal{X}^0$. On a alors un morphisme $\psi : \mathcal{X}^0 \rightarrow \text{Grass}(W, 4)$ dans la grassmannienne des sous-espaces vectoriels K de W de codimension 4 : on fait correspondre au morphisme Kronecker u le sous-espace vectoriel K associé au sous-espace projectif sur lequel ce morphisme s'annule. Le morphisme ψ passe au quotient pour donner un morphisme

$$\tilde{\psi} : \mathfrak{B}_{W,0} \rightarrow \text{Grass}(W, 4)$$

équivariant pour l'action du groupe projectif $PGl(W)$. Il en résulte que ce morphisme est un fibré localement trivial dans la topologie de Zariski, et sa fibre au-dessus du point défini par le sous-espace vectoriel $K \subset W$ est évidemment isomorphe à $\mathfrak{B}_{W/K,0}$. Les fibres de $\tilde{\psi}$ sont rationnelles d'après ce qu'on a déjà vu. La lemme en résulte. $\square$

Le cas $\chi = 2, r > 4$. Dans ce cas nous avons le résultat suivant.

LEMME 5.8. *Si $\chi = 2$ et $r > 4$, l'ouvert U^* contient des points correspondant à des systèmes cohérents stables (Γ, E) tels que E soit stable.*

Démonstration. La démonstration est une variante de celle du lemme 5.6. On a vu que pour un point (Γ, E) de U^* , E est de rang 2, et le calcul des classes de Chern a montré que $(4c_2 - c_1^2)(E) = (r-2)(r-4) \geq 3$, et $\neq 4$.

Réciproquement, ces conditions numériques sont suffisantes pour affirmer que l'espace de modules $M_r := M(2; r, g+1)$ des faisceaux semi-stables de rang 2, de classe de Chern $c_1 = r$ et de caractéristique d'Euler-Poincaré $3r$, autrement dit de classe de Chern $c_2 = 2 + \frac{1}{2}r(r-3) = g+1$, est non vide, et irréductible. De plus, il est bien

connu[9] que l'ouvert M_r^0 correspondant aux points stables qui se représentent par des faisceaux localement libres E satisfaisant à la condition $h^0(E) = 3r$ est lui aussi non vide. On peut même supposer que E a la cohomologie naturelle, ce qui implique que si $h^0(E(-i)) \neq 0$ on a obligatoirement

$$\begin{aligned} h^0(E(-i)) &= \chi(E(-i)) \\ &= -(i-3)(r-i) \end{aligned}$$

Considérons donc un tel fibré E . Il suffit de vérifier que dans la grassmannienne $\text{Grass}(2, H^0(E))$ l'ouvert des points Γ^* pour lesquels que le système cohérent (Γ^*, E) est stable est non vide. Il revient au même de constater que le complémentaire est de dimension $< 2(3r-2)$. Dire que (Γ^*, E) est instable signifie ici qu'il existe un sous-fibré $L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(i) \subset E$ tel que $\Gamma^* \subset H^0(L)$, sauf peut-être pour $i = \frac{r}{2}$, où il suffit d'exi-

ger que $\Gamma^* \cap H^0(E) \neq \{0\}$. Mais on doit avoir $2i < r$ d'après la condition de stabilité de E , donc ce dernier cas n'arrive pas; en fait on doit avoir $i < 3$ puisque $h^0(E(-i)) \neq 0$.

La dimension du schéma de Hilbert des sous-fibrés inversibles de classe de Chern $c_1 = i$ est $(3-i)(r-i) - 1$; par suite, les points instables constituent un fermé de dimension inférieure au maximum des deux nombres

$$(3-i)(r-i) + 2 \left[\frac{1}{2}(i+1)(i+2) - 2 \right] = r(3-i) + 2i^2 - 4$$

pour $i = 1$ et 2 . Par suite ce fermé est de codimension $\geq 4r - 1$. Ceci entraîne le résultat. $\square$

Le cas $\chi = 2, r$ impair ≥ 5 . Il existe dans ce cas un faisceau universel $E \rightarrow M_r \times \mathbb{P}_2$; soit $p: M_r \times \mathbb{P}_2 \rightarrow M_r$ la première projection. L'image

directe $\mathcal{E} = p_*(E)$ est localement libre de rang $3r$ au-dessus de l'ouvert M_r^0 . On peut dans ce cas considérer la grassmannienne relative $\text{Grass}(2, \mathcal{E})$ au-dessus de M_r^0 : c'est un fibré en grassmanniennes localement trivial dans la topologie de Zariski, dont les points s'interprètent comme des systèmes cohérents (Γ^*, E) . En raison du lemme ci-dessus, on obtient un morphisme birationnel

$$\psi : \text{Grass}(2, \mathcal{E}) \dashrightarrow U^*.$$

On sait d'après le résultat de Hulek [8] que l'espace de modules M_r est rationnel: il en résulte que U^* et par suite $N_{P_2}(r, 2)$ est rationnel.

§ Le cas $\chi = 2$, r pair ≥ 6 . Ce cas est beaucoup plus délicat, car sur aucun ouvert de Zariski de M_r il n'existe de faisceau universel. Nous allons montrer cependant qu'il existe une variété $\mathcal{B}$ relativement projective et localement triviale au-dessus de M_r^0 dont la fibre au-dessus du point $x \in M_r^0$ représentant un fibré vectoriel E est la grassmannienne $\text{Grass}(2, H^0(E))$.

LEMME 5.9. *Il existe sur M_r^0 un fibré vectoriel $\mathcal{F}_k$ tel que au-dessus de chaque point x représenté par un fibré stable E on ait*

$$\mathcal{F}_k(x) = \Lambda^{2k} H^0(E).$$

De plus, il existe un morphisme canonique $S^k \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_k$ induisant au-dessus de chaque point la multiplication extérieure.

Démonstration. Soit $n = \frac{1}{4}(4c_2 - c_1^2) = \frac{1}{4}(r-2)(r-4)$, G le fibré trivial de rang n sur le plan projectif dual, et $\mathcal{X}$ l'espace vectoriel des morphismes de Kronecker $G \xrightarrow{u} G(1)$. Le groupe $\text{Aut}(G) = \text{GL}(n, \mathbb{C})$ opère sur $\mathcal{X}$ par conjugaison. On sait [1] que l'ouvert M_r^0 s'identifie à un bon quotient d'un sous-schéma localement fermé $\mathcal{M}$ de $\mathcal{X}$ invariant par l'action de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$; le stabilisateur d'un point u s'identifie au groupe des automorphismes de déterminant 1 du fibré E associé. Les points de M_r^0 correspondant à des fibrés stables, le stabilisateur d'un tel point x est réduit à $\pm \text{id}$. De plus, l'action de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}$ est propre [10]; il en résulte que le quotient M_r^0 est un quotient géométrique de $\mathcal{M}$.

Sur $\mathcal{M} \times P_2$, il existe un fibré universel, noté encore E ; c'est un fibré vectoriel muni d'une action linéaire de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ au-dessus de l'action de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}$. Si $p : \mathcal{M} \times P_2 \rightarrow \mathcal{M}$ désigne encore la première projection, on peut considérer l'image directe $\mathcal{E} = p_*(E)$ sur $\mathcal{M}$. C'est un faisceau localement libre de rang $3r$ qui est encore muni d'une action linéaire de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. L'action du stabilisateur d'un point n'étant pas triviale, ce fibré ne se descend pas en un fibré vectoriel sur M_r^0 . Par contre, sur le fibré vectoriel $\Lambda^{2k} \mathcal{E}$, l'action du stabilisateur est triviale. Le fibré $\mathcal{F}_k$ est défini par

$$\mathcal{F}_k = \Lambda^{2k} \mathcal{E} / \text{GL}(n, \mathbb{C}).$$

L'opération de multiplication extérieure $S^k(\Lambda^{2k} \mathcal{E}) \rightarrow \Lambda^{2k} \mathcal{E}$ est compatible avec l'action de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ et passe au quotient, ce qui achève la démonstration du lemme. $\square$

Le morphisme naturel $\lambda : S^2 \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ que l'on vient de construire est de rang constant. Il en résulte que le cône relatif $\mathcal{C} \rightarrow M_r^0$ défini par

les vecteurs $\xi \in \mathcal{F}_1$ tels que $\lambda(\xi^2) = 0$ est localement trivial au-dessus de M_r^0 . Soit $\mathcal{C}^*$ le complémentaire de la section nulle dans $\mathcal{C}$. Le quotient

$$\mathcal{B} := \mathcal{C}^*/\mathbb{C}^* \rightarrow M_r^0$$

est une variété relativement projective, localement triviale au-dessus de M_r^0 dont la fibre au-dessus du point représentant le fibré E est la grassmannienne $\text{Grass}(2, H^0(E))$.

Le lemme 5.8. fournit encore un morphisme birationnel $\psi: \mathcal{B} \dashrightarrow U^*$. On sait d'après le résultat de Maeda [14] que l'espace de modules M_r est rationnel : il en résulte que U^* et par suite $N_{P_2}(r, 2)$ est rationnel. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

1. W. Barth, *Moduli of vector bundles on projective plane*. Invent. Math., **42** (1977) 63–91.
2. J. M. Drezet, *Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $P_2(\mathbb{C})$* , A n. Inst. Fourier (Grenoble), **38** (1988) 105–168.
3. J. M. Drezet et J. Le Potier, *Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur le plan projectif*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **18** (1985) 193–244.
4. J. M. Drezet et M. S. Narasimhan, *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*. Invent. Math. **97** (1989) 53–94.
5. E. Formanek, *Rational functions fields, Noether's problem and related questions*. J. Pure Appl. Algebra **31** (1984) 28–36.
6. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. Springer, Berlin, 1977.
7. N. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*. Proc. London Math. Soc. (3) **55** (1987), 59–126.
8. K. Ito, *Stable rank-2 vector bundles on P_2 with c_1 odd*, Math. Ann. **242** (1979) 241–266.
9. J. Le Potier, *Stabilité et amplitude sur P_2* . In: *Vector Bundles and Differential Equations (Proceedings, Nice, 1979)*, pp. 145–182. Progress in Math. Vol. 7, Birkhäuser, Basel, 1980.
10. J. Le Potier, *Sur le groupe de Picard des espaces de modules de fibrés stables sur le plan projectif*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1981), 141–155.
11. J. Le Potier, *Systèmes cohérents et structures de niveau*. Preprint, Université Paris, 7, 1992.
12. J. Le Potier, *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*. Cours de D.E.A., Université Paris 7, 1991.
13. J. Le Potier, *Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques*. In *Lecture Note Series Vol 179* pp. 213–240, London Math. Soc., 1992.
14. T. Maeda, *An elementary proof of the rationality of the moduli space for rank-2- vector bundles on P_2* Hiroshima Math. J. **20** (1990), 103–107.
15. M. Maruyama, *Vector bundles and torsion sheaves*. In: *International Colloquium on Vector Bundles on Algebraic Varieties* (1984), pp. 275–339, Oxford Univ. Press, 1987.
16. N. Mestrano and S. Ramanan, *Poincaré bundles for families of curves*. J. Reine Angew. Math., **362** (1985).
17. D. Mumford and J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*. Springer, Berlin, 1982.
18. I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*. Springer, Berlin, 1977.
19. C. Simpson, *Higgs bundles and local systems*. Preprint, Princeton University, 1990.
20. C. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety*. Preprint, Princeton University, 1990.
21. C. Sorger, *Théorèmes caractéristiques des courbes tracées sur une surface lisse*. J. Reine Angew. Math., à paraître.
22. S. A. Strømme, *Ample divisors on fine moduli spaces on the projective plane*, Math. Z. **187** (1984), 405–423.

Reçu le 2 décembre 1992

Université Paris 7
UFR de Mathématiques et URA 212
F-75251 Paris Cedex 05
2, Place Jussieu,
France