

## Kneser猜想及其推广

Friday, May 23, 2014

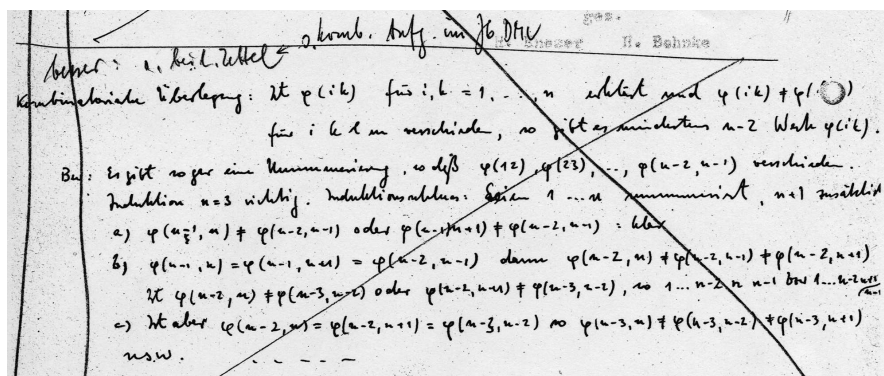


Figure 1: Kneser叙述他的猜想原文手稿

## Contents

|   |                                   |    |
|---|-----------------------------------|----|
| 1 | Lyusternik-Shnirel'man定理与Greene定理 | 2  |
| 2 | Kneser猜想与Greene的证明                | 2  |
| 3 | Lovász的证明大意                       | 4  |
| 4 | Bárány的证明与Schrijver定理             | 4  |
| 5 | Dol'nikov定理与超图上的Kneser猜想          | 5  |
| 6 | Matoušek的组合证明以及推广                 | 7  |
| 7 | 拓扑组合的历史注记                         | 9  |
| 8 | 鸣谢与拓展阅读                           | 10 |

首先我们需要知道如下的Borsuk-Ulam定理:

**引理1** (Borsuk-Ulam).

对于任意  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  连续, 存在  $x \in S^n$  使得  $f(-x) = f(x)$ 。

## 1 Lyusternik-Shnirel'man定理与Greene定理

这个猜想的证明主要使用了Lyusternik与Shnirel'man版本的Borsuk-Ulam定理, 它的具体表述如下:

**引理2** (Lyusternik-Shnirel'man).

令  $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$  为闭集, 且其覆盖住  $S^n$ , 那么存在  $F_i$  包含对径点 (即  $x, -x \in F_i$ )。

*Proof.* 令映射  $f: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  定义为  $f(x) = (\text{dist}(x, F_1), \text{dist}(x, F_2), \dots, \text{dist}(x, F_n))$ 。  $\text{dist}(x, F)$  代表了在  $S^n$  上点  $x$  与集合  $F$  用测地线连接的最短距离。那么存在  $y \in S^n$  使得  $f(y) = f(-y)$ 。如果  $f(y)_i = 0$  成立 (即第  $i$  个分量为0), 那么由定义可知  $-y \in F_i$  (由于  $F_i$  闭)。如果任意  $i \leq n$  都没有  $f(y)_i = 0$ , 也就是  $y, -y \in F_{n+1}$ 。  $\square$

但是只是用闭集不能满足我们的要求, 我们还需要球用开或闭集覆盖:

**引理3** (开集的LS定理).

令  $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$  为开集, 且其覆盖住  $S^n$ , 那么存在  $F_i$  包含对径点。

*Proof.* 我们只需要寻找到一个闭集族  $\{U_i\}$ , 使得  $U_i \subset F_i$  且  $\{U_i\}$  也是  $S^n$  的覆盖。这样的  $U_i$  可以通过如此方法: 对于任意  $x \in S^n$  且  $x \in F_i$ , 我们取  $N(x)$  为  $x$  的开邻域, 满足闭包  $\overline{N(x)} \subset F_i$ 。那么利用  $S^n$  是紧的,  $\{N(x)\}_{x \in S^n}$  必然有有限子覆盖。我们只需要取子覆盖中  $F_i$  对应的  $N(x)$  闭包的并即可 (这样就有了  $U_i \subset F_i$ )。  $\square$

**引理4** (Greene).

令  $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$  为开集, 且其覆盖住  $S^n$ , 那么存在  $F_i$  包含对径点。

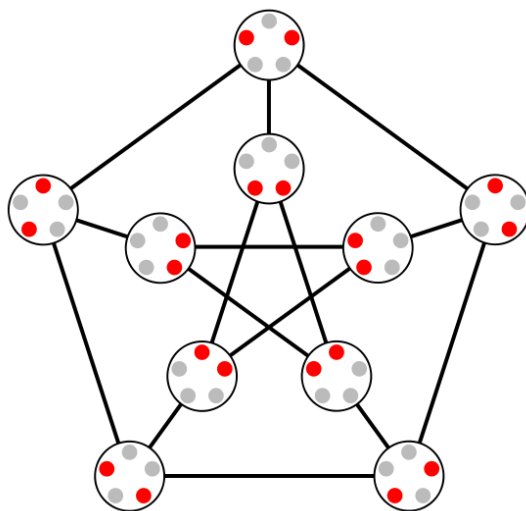
*Proof.* 不妨设  $F_1, F_2, \dots, F_k$  为闭集, 剩下的是开集。那么取  $(F_i)_\epsilon$  为  $F_i$  的  $\epsilon$  开邻域。那么  $(F_1)_\epsilon, \dots, (F_k)_\epsilon, F_{k+1}, \dots, F_{n+1}$  满足推论3的条件。那么存在  $x_i, -x_i$  在某个集合里面。如果在  $i \geq k+1$  的开集里面, 那证明结束。如果不在, 那么令  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $S^n$  的紧性说明就有收敛子列。利用  $F_i$  在  $i \leq k$  是闭的可得结论。  $\square$

## 2 Kneser猜想与Greene的证明

下面我们介绍一下Kneser图  $KG_{n,k}$ 。它节点的集合为  $\binom{[n]}{k}$ , 即集合  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  的  $k$  元子集。而两个子集  $S$  与  $S'$  相连当且仅当  $S \cap S' = \emptyset$ 。一个简单的例子是  $KG_{5,2}$  如下:

**猜想5** (Kneser).

对于任意  $k > 0$  以及  $n \geq 2k - 1$ , 我们有  $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$ , 其中  $\chi$  为染色数。

Figure 2:  $KG_{5,2}$ 即著名的Petersen图

首先我们可以注意到上界是简单的。我们只需要定义染色  $c: \binom{[n]}{k} \rightarrow \{1, 2, \dots, n - 2k + 2\}$  为

$$c(S) = \min\{\min(S), n - 2k + 2\}$$

如果  $c(S) = c(S') < n - 2k + 2$ , 那么  $\min S$  与  $\min S'$  有相同的最小元, 显然  $S$  与  $S'$  相交。而如果  $c(S) = c(S') = n - 2k + 2$ , 根据抽屉原理它们还是有公共元素。因此  $c$  的确是图的染色。□

但是对于下界的证明并不是显然的。1953年Lovász首次得到了这个猜想的证明。Lovász用了大量的代数拓扑工具, 比较复杂。而在2003年, 还是本科生的Greene发现了其中的组合本质, 因此得到了如今广为人知的简单证明。它因为这个美妙的证明而拿了当年的Morgan奖。

*Proof.* 考虑  $KG_{n,k}$  以及  $d = n - 2k + 1$ , 那么令  $X \subset S^d$  为一族在一般位置的点, 也即不存在  $(d - 1)$  维的超平面上有  $X$  中的  $d$  个点。那么我们假设Kneser图有节点  $\binom{X}{k}$ , 对于任意  $x \in S^d$ , 令函数

$$H(x) = \{y \in S^d : \langle x, y \rangle > 0\},$$

也即在  $x$  所在的半球面上的点。

那么假设我们有对于  $KG_{n,k}$  的  $d$  染色, 且定义集合  $A_1, A_2, \dots, A_d \subset S^d$  如下:  $A_i$  为  $x \in S^d$ , 使得  $H(x)$  包含了某个被染色为  $i$  的集合  $S \in \binom{X}{k}$  中的所有点。且我们定义

$$A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d).$$

显然有  $A_i$  在  $i \leq d$  时候是开集, 因为稍微变动一点, 开的上半球面还是会覆盖住染色为  $i$  集合中的点, 从而  $A_{d+1}$  是开集。而由于上面的推论4, 存在  $i$  使得  $x, -x \in A_i$ 。如果  $i \leq d$ , 这表明存在  $S$  和  $S'$  不相交染了同样的颜色, 显然不行。从而只能  $x, -x \in A_{d+1}$ 。

但是对于这种情况，我们有 $|H(x) \cap X|, |H(-x) \cap X| \leq k - 1$ 成立。但是这样的话， $d - 1$ 维的超平面 $S^d \setminus (H(x) \cup H(-x))$ 就会包含 $n - 2k + 2 = d + 1$ 个点，与假设的一般位置矛盾。  $\square$

### 3 Lovász的证明大意

这里我会大致写下Lovász证明到底说了什么。这个证明是现代拓扑组合学的开端。他的原始证明比较长，这里就提一下梗概：

**Step 1:** 构造 $G$ 的“邻域单纯形” $\mathcal{N}(G)$

每一个图都有对应的邻域单纯形。而邻域单纯形的定义是有公共邻居的节点集合组成的单纯形。比如说这样的图：我们可见，集合 $\{1, 2, 5\}$ ,  $\{1, 3, 4\}$ 以及 $\{2, 3\}$ 是极大的单

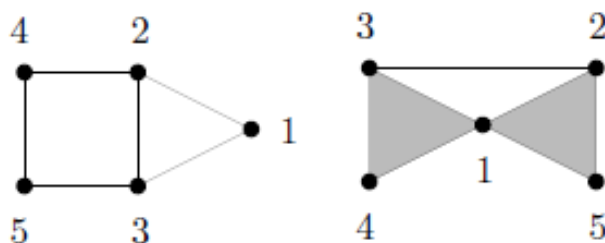


Figure 3: 左图是原图 $G$ ,右图是单纯形 $\mathcal{N}(G)$ 的几何实现

纯形。而几何实现即如右图。 $\{1, 2, 5\}$ 和 $\{1, 3, 4\}$ 代表两个三角形，而 $\{2, 3\}$ 则是直线。

**Step 2:**  $\mathcal{N}(G)$ 是 $n$ -连通，那么它不是 $n + 2$ 可染色的。

我们可见下图是0-连通，因为0-连通就是连通，而它不是2-可染色的。同时，它不是1-连通，因为 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ 构成环。

由于图的 $(m + 2)$ -染色诱导了图同态 $G \rightarrow K_{m+2}$ ，其中 $K_{m+2}$ 为完全图。这个图同态也就给出了拓扑空间 $\mathcal{N}(G) \rightarrow \mathcal{N}(K_{m+2})$ 的连续函数。很容易验证 $\mathcal{N}(K_{m+2})$ 是一个 $m$ -维球。那么如果 $\mathcal{N}(G)$ 是 $n$ -连通的，利用连续函数 $\mathcal{N}(G) \rightarrow \mathcal{N}(K_{m+2})$ 我们就可以构造出一个对径的连续映射(antipodal map) $f : S^{n+1} \rightarrow S^m$ (PS: 这一步不是显然的),其中利用 $n \leq m - 1$ 可得矛盾。

**Step 3**验证 $\mathcal{N}(KG_{n,k})$ 是 $(n - 2k - 1)$ 连通的。

Lovász的证明是用拓扑对组合问题进行研究的开端。而这篇文章体现了Borsuk-Ulam定理在拓扑组合这一新兴学科中的重要应用，并激励了一大批人对拓扑组合问题进行研究，对于这一方法应用的历史沿革将附在最后（来自Longueville）。

### 4 Bárány的证明与Schrijver定理

其实Greene并不是第一个对Lovász的证明进行改进的人。早在1978年，Bárány就给出了一个较为简单的证明，但是它利用了Gale引理。该引理叙述如下：

**引理6 (Gale).**

对于任意  $d \geq 0$  以及任意  $k \geq 1$ , 存在包含  $2k + d$  个点的集合  $X \subset S^d$ , 使得任意  $S^d$  的开半球必包含  $k$  个  $X$  中的点。

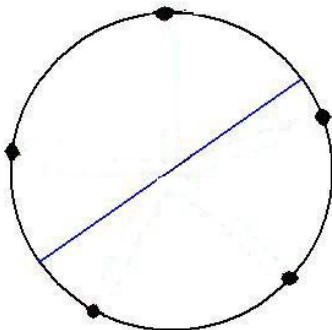


Figure 4: 一种开半球的分划

对于该引理的证明我们略去, 但是这个引理能够给出Kneser猜想的证明。

*Proof.* 对于  $d = n - 2k$ , 我们取  $X \subset S^d$  为满足Gale引理的点集。那么假设我们有  $(d + 1)$ -染色, 同样定义  $A_i$  为  $x \in S^d$ , 使得  $H(x)$  包含了某个被染色为  $i$  的集合  $S \in \binom{X}{k}$  中的所有点。注意到这次我们可以定义  $1 \leq i \leq d + 1$  是因为我们染色是  $(d + 1)$ -染色。而由于Gale引理得知所有点都属于某个  $A_i$ 。但是再利用推论3, 我们知道存在  $x, -x \in A_i$ 。但这与Kneser图的定义矛盾。  $\square$

我们可见Bárány的证明虽然利用了Gale引理, 但是它同样可以用在其他一些集合上。比如说Schrijver图。有如下定义:

**引理7 (Schrijver).**

定义一个集合  $S \subset [n]$  是2-稳定 (2-stable) 的, 如果  $k \in S$ , 那么对于  $\forall l \in S, 2 \leq |l - k| \leq n - 2$ 。而定义Schrijver图  $SG(n, k)$  为所有稳定的集合  $S$  给出的Kneser图。

显然我们可以发现,  $SG(n, k)$  为  $KG(n, k)$  的子图。一个自然的想法就是,  $\chi(SG(n, k)) \stackrel{?}{=} n - 2k + 2$ 。而答案是肯定的, 显然上界成立, 而下界的给出则是Ziegler对于Gale引理的加强:

**引理8 (Ziegler加强的Gale引理).**

对于任意  $d \geq 0$  以及任意  $k \geq 1$ , 存在包含  $2k + d$  个点的集合  $X \subset S^d$ , 使得任意  $S^d$  的开半球必包含  $k$  个  $X$  中的点。且这  $k$  个点的集合是2-稳定的。

这个引理的证明可见Matoušek书上的76页。而有了这个引理, Bárány的证明可以很简单地就应用到Schrijver图上, 且证明完全相同。

## 5 Dol'nikov定理与超图上的Kneser猜想

从上面的Schrijver图我们可以看出, 实际上我们可以对任何超图定义它的Kneser图, 也即对于超图  $\mathcal{H} = (X, \mathcal{F})$ , 将  $\mathcal{F}$  中的元素看成节点, 而  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$  是相邻的当且仅当  $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ 。

$F_2 = \emptyset$ , 我将其记为  $KG(\mathcal{H})$ 。而这个Kneser图也有类似的性质。为了叙述这样的结果, 我们先看几个定义:

**定义9** (超图).

我们称超图  $\mathcal{H} = (X, \mathcal{F})$  是2-可染色的如果存在映射  $X \rightarrow \{1, 2\}$  (1, 2看成点的颜色), 使得任意一个超边都包含两种颜色的点。

同时, 我们可以定义”缺损2-染色数”(2-colorability defect)如下:

**定义10** (缺损2-染色数).

$$cd_2(\mathcal{H}) = \min\{|Y| : (X \setminus Y, \{F \in \mathcal{F} : F \cap Y = \emptyset\}) \text{ 是2-可染色的}\}$$

也就是超图  $\mathcal{H}$  至少去掉多少点 (以及与这个点相连的超边) 能够使它变成2-可染色的超图。

而这样的Kneser图有个比较好的性质。

**引理11** (图  $G$  的Kneser超图实现).

任意一个图  $G$ , 都存在一个超图  $\mathcal{H}$ , 使得  $KG(\mathcal{H}) = G$ 。

*Proof.* 取图的补图, 然后定义为补图上的边编号, 将补图上的编号赋予节点即可。如下是一个例子 □

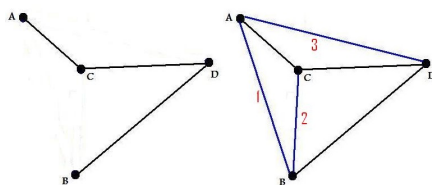


Figure 5:  $A \rightarrow \{1, 3\}, B \rightarrow \{1, 2\}, C \rightarrow \{2\}, D \rightarrow \{3\}$

那么通过对Kneser图的观察 (这里的Kneser图看成  $KG(\mathcal{H})$ , 其中  $X = [n], \mathcal{F} = \binom{[n]}{k}$ ), 我们知道  $cd_2(\mathcal{F}) = n - 2k + 2$ 。这是由于如果去除  $n - 2k + 2$  个点, 那么剩下  $2k - 2$  个点只需要将  $k - 1$  个点染成1, 另外  $k - 1$  个点染成2即可得到一个2-染色。而去除  $n - 2k + 1$  个点, 根据抽屉原理, 存在一个染色必然包含至少  $k$  个点。那么这  $k$  个点的超边就不是2-染色了。

因此我们通过观察就有了如下的结论:

**定理12** (Dol'nikov).

对于任意有限的超图  $\mathcal{H} = (X, \mathcal{F})$ , 我们有  $\chi(KG(\mathcal{H})) \geq cd_2(\mathcal{F})$

*Proof.* 证明使用到的就是类似Greene的方法。令  $d = \chi(KG(\mathcal{H}))$ , 那么同样将  $X$  与  $S^d$  上处于一般位置的  $X$  等同。同样定义  $A_i$  如上, 也即  $x \in A_i$  当  $H(x)$  恰好包含了染色为  $i$  的超边  $F \in \mathcal{F}$ 。同时令  $A_{d+1} = S^d \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_d)$ 。

由于Greene定理, 对于某 $i$ , 存在 $x, -x \in A_i$ 。若 $1 \leq i \leq d$ , 与Kneser图染色矛盾, 所以只能 $i = d + 1$ 。令 $Y$ 为在赤道上节点的个数。此时我们将 $H(x)$ 中的节点染为颜色1, 将 $H(-x)$ 中节点染为颜色2。那么 $X \setminus Y$ 即为2-可染色的。从而根据 $|Y| \leq d$ 可知

$$cd_2(\mathcal{F}) \leq |Y| \leq d = \chi(KG(\mathcal{H})).$$

□

**注记:** 通过引理11, 我们就知道, 任意一个图我们都能够通过这样的方法找到它染色的一个下界!

对于一些特殊的超图, 我们是否有更一般的结论呢? 对于前面我们定义超图的2-染色, 我们同样也可以类似地定义超图的 $k$ -染色。也即将 $X$ 中的点染为 $k$ 种颜色, 使得每个超边不是单色的。这样我们就可以定义 $\chi(\mathcal{H})$ 为超图的染色数(即最小可以使超图染色存在的 $k$ )。

同样, 对于Kneser图, 我们也可以推广到Kneser超图。

**定义13** (Kneser超图)。

$KG^r(n, k) = (X, \mathcal{F})$ 是超图, 其中 $X = \binom{[n]}{k}$ , 而超边的集合 $\mathcal{F}$ 中为 $r$ 个互不相交的 $x \in X$ 组成。

从这里可以看出, 我们原来定义的Kneser图 $KG(n, k)$ 实际上就是 $KG^2(n, k)$ 。我们同样可以考虑Kneser超图的染色数。Erdős在1976年作出如下猜想:

**猜想14** (Erdős的Kneser染色猜想)。

$$\chi(KG^r(n, k)) = \left\lceil \frac{n - (k-1)r}{r-1} \right\rceil$$

该猜想已由Alon, Frankl和Lovász在1986年证明成立。他们的证明主要也用了代数拓扑的结论。而同理, 我们也可以定义Schrijver图的推广。我们可以定义集合 $S \subset [n]$ 为 $s$ -稳定, 如果对于任意不等的 $i, j \in S$ , 有 $s \leq |i - j| \leq n - s$ 。于是我们就可以定义 $KG^r(n, k)_{s\text{-stab}}$ 为限制在 $s$ -稳定的集合上的Kneser  $r$ -超图。对于Schrijver图的结论以及Alon-Frankl-Lovász定理, 自然地就有如下猜想

**猜想15** (Alon-Drewnowski-Luczak)。

$$\chi(KG^r(n, k)_{s\text{-stab}}) = \left\lceil \frac{n - (k-1)r}{r-1} \right\rceil$$

这个猜想现在还是一个开放问题。Ziegler首次证明了 $\chi(KG^r(n, k)_{r\text{-stab}})$ 与 $\chi(KG^r(n, k))$ 相等, 而Meunier证明了 $\chi(KG^r(n, k)_{\sim r\text{-stab}})$ 的染色数是猜想所述, 其中 $KG^r(n, k)_{\sim r\text{-stab}}$ 是限制在 $|i - j| \geq s$ 这样集合上的Kneser图。

## 6 Matoušek的组合证明以及推广

Matoušek在2000年也给出了用Tucker引理的证明与一个纯组合的证明。这个证明的思想被迅速推广到上面很多定理的证明当中, 从而从众多拓扑证明中脱颖而出, 有令人耳目一新之感。如下是他证明的主要思想:

首先注意到Tucker引理可以有如下推广：

**引理16** (八面体Tucker引理——Octahedral Tucker's lemma).

对于任意集合  $A, B \in [n]$ , 且  $A \cap B = \emptyset, A \cup B \neq \emptyset$ , 对于任意满足  $\lambda(A, B) = -\lambda(B, A)$ , 且值域是  $\{+1, -1, +2, -2, \dots, +(n-1), -(n-1)\}$  的函数  $\lambda$ 。存在两个集合组  $(A_1, B_1)$  以及  $(A_2, B_2)$ , 满足  $(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ , 且有  $\lambda(A_1, B_1) = -\lambda(A_2, B_2)$ 。

其中  $(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$  的意思是,  $A_1 \subset B_1$  且  $A_2 \subset B_2$ , 且至少一个是真包含。

这个引理的证明同样略去, 具体可见Matoušek文章。而用此引理, Kneser猜想的证明就变得比较简单了。以下是Kneser猜想的证明:

*Proof.* 假设  $KG(n, k)$  有一个染色, 定义为  $c: \binom{[n]}{k} \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ 。那么定义函数如下:

$$\lambda(A, B) = \begin{cases} \pm(|A| + |B|) & \text{如果 } |A| + |B| \leq 2k - 2 \\ \pm(c(S) + 2k - 2) & \text{其他} \end{cases}$$

其中  $A, B \subset [n]$  互不相交,  $S$  同样是  $[n]$  的子集, 它有  $k$  个元素, 且  $S \subset A$  或者  $S \subset B$ , 满足  $c(S)$  取得最小值。而在第一种情况, 如果  $\min(A) < \min(B)$ , 则取正号, 否则取负号。在第二种情况, 如果  $S \subset A$  则取正号,  $S \subset B$  取负号。

若  $t \leq n - 2k + 1$ , 那么通过前面的八面体Tucker引理, 存在  $(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ , 使得  $\lambda(A_1, B_1) + \lambda(A_2, B_2)$  成立。但是由于若  $|A_2| + |B_2| \leq 2k - 2$ , 则  $||A_1| + |B_1|| < |A_2| + |B_2|$ 。这样就不能使  $\lambda(A_1, B_1) + \lambda(A_2, B_2) = 0$ 。所以  $|A_2| + |B_2| > 2k - 2$ 。

但是如果  $|A_1| + |B_1| \leq 2k - 2$ , 就有  $|c(S) + 2k - 2| > 2k - 2 \geq |A_1| + |B_1|$ , 只能也有  $|A_1| + |B_1| > 2k - 2$ 。

但是通过第二种情况可以发现, 存在  $k$  元集合  $S_1, S_2$  在不相交的集合中 (因为符号相反), 这与Kneser图的染色矛盾, 因为它们们在Kneser图中相连接。□

这个证明是否巧妙地用Tucker引理给出了一个Kneser猜想的证明, 主要就是用Tucker构造出了两个相邻但是染色一样的点。当然, 上面所展现的并不是Matoušek原文, 而是利用原文类似的想法由Meunier给出的。用这样类似的证明, Ziegler在2004年首次给出了Schrijver定理的组合证明, 但是证明中使用了有向拟阵(Oriented Matroid), 而且这个证明较长。所以Meunier类似于前面的方法给出了Schrijver定理简短的证明。

**定义17** (交错长alt).

对于  $A, B \subset [n]$ , 定义  $\text{alt}(A, B)$  为最长的单调增的数列  $x_1, x_2, \dots, x_l$ , 使得  $x_i \in A \cup B$ , 且  $x_i \in A$  则  $x_{i+1} \in B$ ;  $x_i \in B$  则  $x_{i+1} \in A$ 。

比如说  $\text{alt}(\{4\}, \{1, 6\}) = 3$ , 对应着1, 4, 6这个数列;  $\text{alt}(\{2, 3, 5, 11\}, \{1, 6, 8, 9, 16\}) = 5$ , 对应着1, 2, 6, 11, 16这个数列。

有了这一个工具, 我们就可以得出以下的Schrijver定理:

**定理18** (Schrijver).

Schrijver图染色数是  $n - 2k + 2$

*Proof.* 设  $SG(n, k)$  有一个染色, 定义为  $c: \binom{[n]}{k} \rightarrow \{1, 2, \dots, t\}$ 。那么定义函数如下:

$$\lambda(A, B) = \begin{cases} \pm(\text{alt}(A, B)) & \text{如果 } \text{alt}(A, B) \leq 2k - 1 \\ \pm(c(S) + 2k - 1) & \text{其他} \end{cases}$$

情况与上面类似,  $S$  是  $k$  元子集  $S \subset A$  或者  $S \subset B$ , 满足  $c(S)$  取得最小值。而在第一种情况, 如果  $\min(A) < \min(B)$ , 则取正号, 否则取负号。在第二种情况, 如果  $S \subset A$  则取正号,  $S \subset B$  取负号。

类似地, 如果  $t \leq n - 2k + 1$  且  $(A_1, B_1) \prec (A_2, B_2)$ , 类似可以说明, 存在两个互不相交的  $S_1, S_2$  被染上同样的颜色。我们只需要验证在  $\text{alt}(A_2, B_2) \leq 2k - 1$  的时候, 有  $\text{alt}(A_2, B_2) + \text{alt}(A_1, B_1) \neq 0$ 。假设  $x_1, x_2, \dots, x_l$  为  $(A_2, B_2)$  中最长的交错列。且不妨设  $x_1 \in A_2$ , 那么  $B_2$  中最小元必然大于  $x_1$ , 否则我们有了一个更长的交错列。那么由于显然有若  $\text{alt}(A_1, B_1)$  与  $\text{alt}(A_2, B_2)$  符号相反, 则  $\text{alt}(A_1, B_1)$  中最长交错列第一个元素在  $B_1$  中, 这表明  $A_1$  中没有比  $B_1$  最小元更小的元素。但这样我们就能够构造出  $(A_2, B_2)$  中更长的一个交错列, 因为  $A_2$  中有元素比  $B_2$  中元素要小, 矛盾。所以只有  $\text{alt}(A_2, B_2) > 2k - 1$ , 显然这样可见  $\text{alt}(A_1, B_1) > 2k - 1$  这样就完成了证明。□

我们类似地可以证明 Dol'nikov 定理, 以下的证明来自 Ziegler:

*Proof.* 类似地, 假设  $c: \mathcal{F} \rightarrow [t]$  为染色, 那么假设  $cd_2(\mathcal{F}) > t$ , 也即对于任意  $[n]$  中元素个数大于  $n - t$  的子集, 对于任意对  $X$  的 2-染色, 存在一个  $s \in \mathcal{F}$ , 使得  $s$  中的点全被染成相同的颜色。那么定义  $\lambda$  如下:

$$\lambda(A, B) = \begin{cases} \pm(t + |A| + |B|) & \text{如果 } |A| + |B| \leq n - t - 1 \\ \pm(c(S)) & \text{其他} \end{cases}$$

其中第一个式子在  $\min(A) < \min(B)$  时候取正, 其他取负。而第二个式子在  $S \subset A$  取正, 其他取负。 $S$  类似上面, 同样是使  $c(S)$  最小的  $S$ 。

显然这样的映射满足八面体 Tucker 引理的条件。同时通过类似的说明 (这里就不再耗费时间讲述了) 可以构造出  $S_1, S_2$  使得互不相交但是染了同样的颜色, 矛盾。□

Matoušek 的组合证明又提出了一个新的思路: 通过拓广 Tucker 引理以及构造合适的函数 (利用反证法给出的条件可以说明要满足值域在  $\pm[n]$  中, 通过 Kneser 图的定义给出矛盾), 我们就可以得到一系列的类似的定理。特别地, 我们前面所提到的  $\chi(KG^r(n, k)_{r\text{-stab}}) \sim$  就是一个没有拓扑证明而只有组合证明的例子, 其中用的工具就是所谓的  $\mathbb{Z}_p$ -Tucker 引理。在此我们略去它的说明。

## 7 拓扑组合的历史注记

以下基本来自于 Longueville 对于 Kneser 猜想所著的文章 “25 years proof of the Kneser conjecture”

### (1) 拓扑的应用

在前面提到过, 在组合中使用拓扑工具来源于 Lovász 对于 Borsuk-Ulam 定理纯熟的应用。也许 Borsuk-Ulam 定理最好的一个推广来自于 Albrecht Dold 在 1983 年的定理:

**定理19 (Dold).**

令 $G$ 为非平凡的有限群, 自由作用在(形态较好的)空间 $X$ 与 $Y$ 上。假如 $X$ 是 $n-1$ -连通, 且 $Y$ 的维数是 $m$ , 那么如果存在 $G$ -等价的映射, 那么 $m \geq n$ 。这里 $G$ -等价意思是,  $\forall g \in G, f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$

如果将 $G$ 看成对径映射,  $X, Y$ 分别是 $S^n$ 与 $S^m$ 就得到了我们一般的Borsuk-Ulam定理的一个等价描述。这样的定理可以用在很多组合的问题之上。

随着时代的发展, 代数拓扑中的工具基本都在组合中找到了它们自己的位置。从同调到上同调, 示性类到谱序列, 都有了组合上的应用, 比如Dmitry Kozlov所著的“图同态的复形”。甚至微分拓扑同样有在组合中的对应, 比如Robin Forman提出的“离散Morse理论”。

对于这些方法的应用有很多。最引人注目的就是“图染色问题”。现在很多图和超图的染色数都有了界的估计, 而估计这些界的方法用的就是拓扑工具。各种“划分问题”同样被解决了, 而最著名的即“项链问题”, 又Noga Alon在1987年解决。更多地, 复杂度问题, 比如说线性决策树算法的复杂度, 以及与Aanderaa - Karp - Rosenberg猜想相关的单调图性质的复杂度, 同样可以用拓扑组合进行解决。另外一个很大的理论及“偏序集的拓扑”。在1980年瑞典数学家Anders Björner提出了偏序集的shellability这一概念。如果我们有一个偏序集, 我们就可以给出一个单纯形, 从而定义一个拓扑空间。Björner提出的偏序集的shellability也即, 这一个相关的拓扑空间是一族球。这个组合的概念以及拓扑的结果给出了许多的应用, 比如说Bruhat序以及代数组合中的一个问题。同时值得注意的是, 如果用了shellability, 我们很容易证明 $\mathcal{N}(KG_{n,k})$ , 也即在Lovász文章中所需要的邻域复形, 是 $(n-2k-1)$ -连通的。

## (2) 回归组合

虽然许多组合定理能够被拓扑证明, 一个自然的问题是, 这些拓扑定理是否能够证明组合问题? 2000年组合学又一次突破, 即Matoušek首次给出了Kneser猜想的组合证明, 也就是我们前面所提到的。证明中用的Tucker引理与Borsuk-Ulam定理是等价的。同样, Borsuk-Ulam定理的组合兄弟们也能够用来解决“平均划分问题”。同时, 离散数学中许多具体的证明需要快速计算同调群或其他不变量, 而这些快速的程序都依赖于组合的构造。

代数拓扑来自于组合拓扑的研究, 正如Solomon Lefschetz首次在杜克大学提出代数拓扑时所说的一样:

*“The assertion is often made of late that all mathematics is composed of algebra and topology. It is not so widely realized that the two subjects interpenetrate so that we have an algebraic topology as well as a topological algebra”*

而最后一句话对于现在的组合与拓扑来说同样成立。

## 8 鸣谢与拓展阅读

最后, 感谢吴耀琨老师所上的“计算拓扑”课, 没有这门课程, 我是不会注意

到Hatcher书上小小的一个Borsuk-Ulam定理居然能用这门有用的应用，能够成为组合领域的一大利器。

同时感谢网上的各位学者，将他们的美妙的成果放在了网络之上，让我有能力一窥这一领域的浩瀚博大。这里我给出我这篇文章所参考的资料：

[1]Some Mathematics Of Theoretical Computer Science: 很简要地给出了Greene的证明，是我第1,2部分的来源

[2]25 years proof of the Kneser conjecture :给出了Kneser猜想的历史，是第3,7部分的主要来源

[3]Kneser's Conjecture and its Generalizations :伊朗人写的presentation，是我4,5部分的主要来源

[4]Combinatorial topology and the coloring of Kneser graphs:法国人的presentation，是我第6部分的来源

这一领域还有许多可以引用的文献，这里我就不一一列举了，从我这几篇文献的引用就可以大致了解了。